

Segundo Parcial 2016

Funciones de variable compleja

Nombre: _____ C.I: _____ N° Parcial: _____

Se deben enunciar todos los teoremas utilizados con hipótesis y tesis y verificar que se está en las hipótesis antes de utilizarlo.

1. a) (7 puntos) Demostrar el **teorema de Liouville**: Si f es una función entera (holomorfa en \mathbb{C}) y acotada entonces f es constante.
b) (7 puntos) Demostrar el **teorema fundamental del algebra**: Si $p(z)$ un polinomio de coeficientes complejos de grado $n > 0$ entonces tiene n raíces contando las con su multiplicidades.
c) (5 puntos) Sea $I = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > \text{Re}(z)\}$. Probar que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $f(\mathbb{C}) \subset I$ entonces f es constante.
2. Sea $f(z) = e^{1/z}$.
a) (4 puntos) Demostrar que $f(z)$ tiene una singularidad esencial en cero.
b) (3 puntos) Probar que dado un conjunto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \theta < \text{Im}(z) < \theta + 2\pi\}$ se cumple que $\overline{e^\Omega} = \mathbb{C}$.
c) (5 puntos) Verificar que dado $r > 0$ se cumple que $\overline{f(D_{(0,r)})} = \mathbb{C}$. Se sugiere aplicarle la función $1/z$ al disco y luego utilizar la parte anterior.
3. a) (7 puntos) Demostrar el **teorema de los residuos**.
b) (7 puntos) Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
4. (4 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando la transformada de Laplace:
$$f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = e^{-t}, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$
5. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ y el polinomio $p(z) = z^5 + \frac{z}{4} - \frac{1}{2}$.
a) (6 puntos) ¿Cuántas soluciones tiene $p(z) = -1$ en el conjunto A ?
b) (5 puntos) Sean $\alpha(t) = e^{it}$ y $\beta(t) = \frac{e^{it}}{2}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcular $\text{ind}_{p(\alpha)}(-1)$ y $\text{ind}_{p(\beta)}(-1)$.

Se recuerda que:

$$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}) = \frac{1}{p + \alpha}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(f(t))p - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = \mathcal{L}(f(t))p^2 - f(0)p - f'(0)$$