Funciones de variable compleja

Segundo Parcial, 7 de julio de 2015.

N^o Examen

Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula**

Problema 1.

10 puntos.

a. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ el único cero de f, probar que existen $m \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$.

b. Sea $q \in \mathcal{H}(\Omega)$ con un único cero en $z_0 \in \Omega$, si $q'(z_0) \neq 0$ deducir que $q(z) = (z - z_0)g(z)$ con $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$.

c. Se define

$$f(z) = \frac{1}{q(z)^2}$$

con q como en la parte anterior. Probar que f tiene un polo de orden 2 en z_0 y que

$$Res(f, z_0) = -\frac{q''(z_0)}{\big(q'(z_0)\big)^3}$$

Problema 2.

15 puntos

Probar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{16\cos^2 t + 9} = \frac{2\pi}{15}$$

Problema 3.

10 puntos.

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera.

a. Probar que $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ o f constante.

Sugerencia: *Suponer que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ que no pertenece a $\overline{f(\mathbb{C})}$ y considerar $g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0}$*

b. Probar que si $Re(f)$ o $Im(f)$ son funciones acotadas entonces f debe ser constante.

Problema 4.

25 puntos.

a. Enuncie el teorema de la aplicación abierta.
b. Enuncie y demuestre el principio del módulo máximo.
c. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad abierto, f una función no constante, continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Si $|f(z)| = 1, \forall |z| = 1$ demostrar que $f(\overline{D}) = \overline{D}$.