Funciones de variable compleja

Segundo Parcial, 7 de julio de 2015

Resolución

Problema 1.

(10 puntos)

a. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$, f puede escribirse como series de potencias en un $D_R(z_0)$ (disco de centro z_0 y radio $R > 0$):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \ldots$$

Como z_0 es un cero de f, se tiene necesariamente que $a_0 = 0$. Además, z_0 es un cero aislado, por lo que, al menos en el $D_R(z_0)$, f no es idénticamente nula. Esto implica que los a_n no pueden ser todos nulos. Sea m el primer natural para el cual el coeficiente a_m es no nulo, es decir, m es tal que $a_m \neq 0$ y $a_i = 0$ $\forall i < m$. La serie de potencias de f queda entonces:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + \ldots$$

Sacando $(z-z_0)^m$ de factor común:

$$f(z) = (z-z_0)^m[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \ldots] = (z-z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Llamando $g(z) = \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-m}$, se tiene que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ya que es analítica) y además $g(z_0) = a_m \neq 0$.

b. Usando la parte anterior, sabemos que $q(z)$ puede escribirse como $q(z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$. Lo único que falta probar es que $m = 1$. Para ello, basta recordar que los coeficientes de la serie de potencias centrada en z_0 pueden calcularse como:

$$a_n = \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}$$

En particular, para $n = 1$ se tiene que $a_1 = q'(z_0) \neq 0$, es decir, el primer coeficiente no nulo de la serie de potencias de f es a_1, por lo que $m = 1$ por definición.

c. Para ver que $f(z)$ tiene un polo en z_0, basta estudiar el límite de f cuando $z \to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{q^2(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^2 g^2(z)}$$

Como $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, es continua, por lo que $g(z) \to g(z_0) \neq 0$ cuando $z \to z_0$, por lo que:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_0)^2 g^2(z)} = \infty$$

Por lo tanto, $f(z)$ tiene un polo en z_0. Para ver que es de orden 2, basta recordar la definición de orden de un polo: es aquel natural k que hace que $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = L$, donde $L \in \mathbb{C}$ y

$L \neq 0$. Estudiemos entonces $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^2 f(z)$:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2\frac{1}{q^2(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2\frac{1}{(z-z_0)^2 g^2(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{g^2(z)} = \frac{1}{g^2(z_0)} \neq 0$$

Por la parte anterior sabemos que $g(z_0)\neq 0$, por lo que ese límite no da infinito, probando así que el polo es de orden 2.

El residuo puede ser calculado a partir de la extensión holomorfa de $(z-z_0)^k f(z)$. Si llamamos $h(z)$ a dicha función, el residuo se calcula como

$$Res(f,z_0) = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

siendo k el orden de z_0 como polo de f. Como en este caso el polo es de orden 2, el residuo queda $Res(f,z_0) = h'(z_0)$. Calculemos esa derivada:

$$h(z) = (z-z_0)^2 f(z) = \frac{(z-z_0)^2}{q^2(z)} = \frac{(z-z_0)^2}{(z-z_0)^2 g^2(z)} = \frac{1}{g^2(z)} \Rightarrow h'(z) = -\frac{2g'(z)}{g^3(z)}$$

$$\Rightarrow Res(f,z_0) = -\frac{2g'(z_0)}{g^3(z_0)}$$

Ahora, sabemos que $q(z) = (z-z_0)g(z)$, por lo que:

$$\begin{aligned} q'(z) &= g(z) + (z-z_0)g'(z) \quad &\Rightarrow \quad q'(z_0) &= g(z_0) \\ q''(z) &= 2g'(z) + (z-z_0)g''(z) \quad &\Rightarrow \quad q''(z_0) &= 2g'(z_0) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\boxed{Res(f,z_0) = -\frac{q''(z_0)}{(q'(z_0))^3}}$$

Problema 2.
(15 puntos)

La idea es transformar la integral real a una integral compleja. Para ello, escribamos $cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{16\cos^2 t + 9} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{16\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 + 9} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\left(e^{2it}+e^{-2it}+2\right)+9} = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{4e^{2it}+17+4e^{-2it}}$$

Sacando factor común e^{-2it} en el denominador se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{e^{-2it}(4e^{4it}+17e^{2it}+4)} = \int_0^{2\pi}\frac{e^{2it}}{4e^{4it}+17e^{2it}+4}\,dt$$

Si ahora consideramos la parametrización de la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro 0 y radio 1, recorrida dos veces en sentido positivo: $z(t) = e^{2it}$ con $t\in[0,2\pi]$, resulta que

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{e^{2it}}{4e^{4it}+17e^{2it}+4}\,dt = -\frac{i}{2}\int_{\mathcal{C}}\frac{dz}{4z^2+17z+4}$$

Llamemos $f(z) = \frac{1}{4z^2+17z+4}$. Utilicemos el teorema de los residuos para calcular la integral compleja. Para ello, necesitamos calcular los polos del integrando:

$$4z^2+17z+4 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -4 \text{ o } z_2 = -\frac{1}{4}$$

Ahora, la circunferencia $\mathcal{C}$ sólo deja al polo z_2 en su interior, por lo que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{4z^2+17z+4} = 2\pi i Res(f, z_2) Ind(\mathcal{C}, z_2)$$

Como la curva se recorre 2 veces, resulta $Ind(\mathcal{C}, z_2) = 2$. Dado que ambos polos son simples, el residuo resulta:

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{z-z_2}{4(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{4(z_2-z_1)} = \frac{1}{4(-\frac{1}{4}+4)} = \frac{1}{15}$$

Entonces

$$I = -\frac{i}{2}\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{4z^2+17z+4} = -\frac{i}{2}\left[2\pi i\left(\frac{1}{15}\right)2\right] \Rightarrow \boxed{I = \frac{2\pi}{15}}$$

Otra opción para resolver el ejercicio es considerar la circunferencia $\mathcal{C}'$ de centro 0 y radio 1, recorrida una vez, parametrizada por $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. De manera similar al procedimiento anterior, se puede concluir que

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{16\cos^2 t + 9} = -i\int_{\mathcal{C}'} \frac{z}{4z^4+17z^2+4}\, dz$$

Los polos del integrando de la derecha son $\pm 2i$ y $\pm\frac{i}{2}$, siendo éstos últimos los únicos que quedan en el interior de $\mathcal{C}'$, por lo que solo es necesario calcular el residuo en dichos puntos.

Problema 3.
(10 puntos)

a. Como se sugiere en el ej., suponemos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ que no pertenece a $\overline{f(\mathbb{C})}$ y consideramos $g(z) = \frac{1}{f(z)-z_0}$. Como $\overline{f(\mathbb{C})}$ es cerrado y el conjunto formado por el único punto z_0 es compacto, existe $K > 0$ tal que $|f(z) - z_0| > K\, \forall z \in \mathbb{C}$. Entonces $|g(z)| < \frac{1}{K}$. Además, $g(z)$ es entera (ya que $f(z)$ es entera y nunca toma el valor z_0), por lo que aplicando el teorema de Liouville se deduce que $g(z) = cte$ y por lo tanto $f(z)$ también es constante.

b. Si $Re(f)$ está acotada, consideramos la función

$$g(z) = e^{f(z)}$$

Entonces:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{Re(f(z))+iIm(f(z))}| = e^{Re(f(z))}|\cos[Im(f(z))] + i\sin[Im(f(z))]| = e^{Re(f(z))}$$

Así, g es una función entera y si $Re(f)$ está acotada, $|g|$ también estará acotada, lo que implica que g debe ser constante por el teorema de Liouville. Por lo tanto, f también es constante.

Si $Im(f)$ está acotada, consideramos la función

$$h(z) = e^{-if(z)}$$

Entonces:

$$|h(z)| = e^{Im(f(z))}$$

Razonando análogamente se concluye que f es constante.

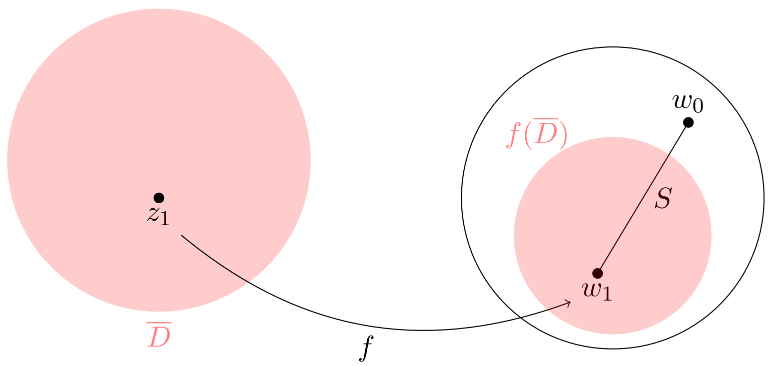
Problema 4.
(25 puntos)

a. Ver teórico.
b. Ver teórico.

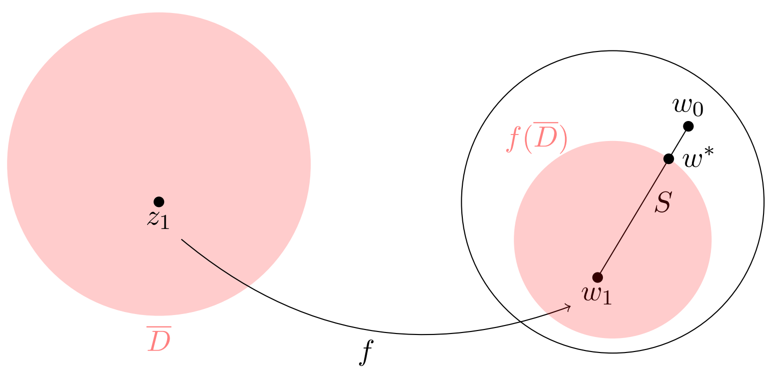
c. La idea es demostrar que lo conjuntos $f(\overline{D})$ y $\overline{D}$ son iguales. Para ello probaremos la doble inclusión, es decir, probaremos que $f(\overline{D}) \subseteq \overline{D}$ y que $\overline{D} \subseteq f(\overline{D})$.

Para la primer inclusión, aplicamos el principio del módulo máximo. Si $|f(z)| = 1, \forall\, |z| = 1$, sabemos que $f(\partial D) \subseteq \partial D$ (es decir, f lleva el borde del disco en un subconjunto del mismo). Entonces, por el principio del módulo máximo, si $|f|$ vale 1 en el borde del disco, debe tomar valores menores que 1 en el interior, por lo que $f(D) \subseteq D$, es decir, lleva el interior del disco en un subconjunto del mismo. En conclusión, hemos probado que $f(\overline{D}) \subseteq \overline{D}$.

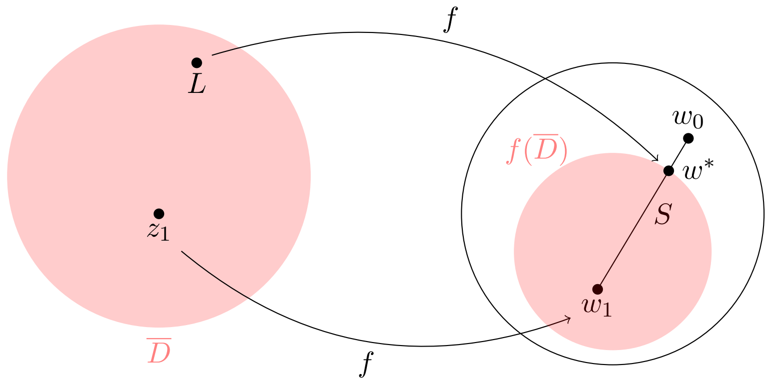
Para la segunda inclusión, supongamos que existe $w_0 \in \overline{D}$ que no es imagen de ningún punto en $\overline{D}$ por f, es decir, no existe $z_0 \in \overline{D}$ tal que $f(z_0) = w_0$. Consideremos ahora un punto cualquiera $z_1 \in D$. Por lo probado anteriormente, existe $w_1 \in D$ tal que $f(z_1) = w_1$. Además, $w_1 \neq w_0$, ya que w_0 no puede ser imagen de ningún punto en $\overline{D}$.



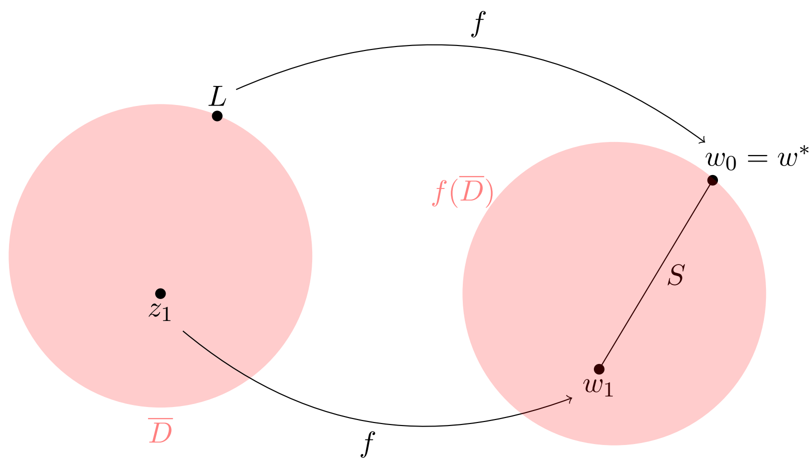
Ahora bien, $\overline{D}$ es convexo, por lo que el segmento S que une w_0 con w_1 está totalmente contenido en $\overline{D}$. Por el teorema de la aplicación abierta, w_1 es interior a $f(\overline{D})$ y por construcción w_0 no lo es, por lo que debe existir un w^* en el segmento S que esté en el borde de $f(\overline{D})$.



Por lo tanto, existe una sucesión de puntos w_n interiores a $f(\overline{D})$ tales que $w_n \to w^*$. Los w_n pertenecen al interior de $f(\overline{D})$, lo que implica que para cada w_n existe un $z_n \in D$ tal que $f(z_n) = w_n$. La sucesión z_n está acotada (por pertenecer al disco), lo que implica que tiene una subsucesión z_{k_n} convergente. Sea L su límite. Como los $z_{k_n} \in D$, resulta $L \in \overline{D}$. Ahora, f es continua, por lo que $f(z_{k_n}) \to f(L)$. Ya probamos que para cada z_{k_n} existe un w_{k_n} tal que $f(z_{k_n}) = w_{k_n}$, lo que implica que $w_{k_n} \to f(L)$. Pero w_{k_n} es una subsucesión de w_n, por lo que tiene que converger a w^*, concluyendo así que $f(L) = w^*$.



Observemos ahora que el punto L no puede ser interior a $\overline{D}$, ya que si lo fuera, por el teorema de la aplicación abierta, $f(L) = w^*$ debería ser interior a $f(\overline{D})$, lo que es falso ya que w^* está en el borde de $f(\overline{D})$. Así que L debe estar en el borde de $\overline{D}$, es decir, debe tener módulo 1. Esto implica que su imagen, w^*, también debe tener módulo 1 (por la hipótesis de que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$). Por lo tanto, tenemos dos puntos $w_0 \in f(D) \subseteq D$ y $w_1 \in f(\overline{D}) \subseteq \overline{D}$ y el segmento que los une debe cortar el borde de D, ya que $|w^*| = 1$ y $w^* \in S$. La única posibilidad es que $w_0 = w^*$. Pero esto contradice la hipótesis de que $w_0 \notin f(\overline{D})$, ya que $w_0 = w^* = f(L)$ con $L \in \overline{D}$.



Hemos probado así que todos los puntos de $\overline{D}$ están en $f(\overline{D})$, es decir, la segunda inclusión que queríamos probar.