

Funciones de variable compleja  
Segundo parcial, 11 de julio de 2014

Nº Parcial

---

Apellidos

Nombres

Nº de Cedula

**Problema 1.**

- Consideramos el polinomio  $p(z) = z^5 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}$ , y el conjunto  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (\frac{1}{2}, 1)\}$ . ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $p(z) = -1$  en el conjunto  $A$ ? Justifica tu respuesta.
- Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas dadas por  $\alpha(t) = e^{it}$  y  $\beta(t) = \frac{1}{2}e^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Se considera  $\gamma = P \circ \alpha$  y  $\delta = p \circ \beta$ . Calcular  $Ind_\gamma(-1)$  y  $Ind_\delta(-1)$  justificando cada paso.

**Problema 2.**

Probar que si  $f$  es una función entera no constante sin ceros entonces existe una sucesión  $\{z_n\}$  tal que  $|z_n| \rightarrow +\infty$  y  $f(z_n) \rightarrow 0$ . Dar un ejemplo de una función y una sucesión que cumplan lo anterior.

**Problema 3.**

Sea  $\Omega$  un abierto conexo de  $\mathbb{C}$  y  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  una sucesión no constante, tal que  $z_n \rightarrow \bar{z} \in \Omega$ ,

- Demostrar que si  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  y  $f(z_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$  entonces  $f \equiv 0$
- Deducir que si  $f$  y  $g$  son dos funciones holomorfas en  $\Omega$  tales que  $f(z_n) = g(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$  entonces  $f(z) = g(z) \forall z \in \Omega$
- Indicar si existe una función holomorfa en el disco unidad que cumpla  $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3 \forall n \in \mathbb{N}$

**Problema 4.**

Calcular enunciando los resultados que utilice

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} dx$$