Funciones de variable compleja

Solución segundo parcial, 11 de julio de 2014

N^o Parcial

Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula**

Problema 1.

a. Consideramos el polinomio $p(z) = z^5 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}$, y el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $p(z) = -1$ en el conjunto A ? Justifica tu respuesta.

Primero observamos que las soluciones de $p(z) = -1$ son ceros de $q(z) = z^5 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}$. Para determinar cuantos ceros tiene q en A usaremos el teorema de Rouché. Primero contemos los ceros en el disco $D(0,1)$, para esto consideramos la función $f(z) = z^5$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Obervamos que si $|z| = 1$ entonces

$$|q(z) - f(z)| = |\frac{1}{4}z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}|z| + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1 = |f(z)|$$

Es claro a partir de la desigualdad que no hay ceros de q ni de f en $\partial D(0,1)$, además ambas funciones son holomorfas por lo que no tiene polos. Por lo tanto q y f tienen la misma cantidad de ceros en $D(0,1)$, es decir 5 contados con multiplicidad.

Ahora contemos los ceros en el disco $D(0, \frac{1}{2})$. Para esto procedemos de forma análoga considerndo la función $g(z) = \frac{1}{2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Verificamos que se cumple la desigualdad para $|z| = \frac{1}{2}$:

$$|q(z) - g(z)| = |z^5 + \frac{1}{4}z| \leq |z| + \frac{1}{4}|z| = \frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{5}{32} < \frac{1}{2} = |g(z)|$$

Luego no tenemos ceros de q en $D(0, \frac{1}{2})$. Como tampoco hay ceros en $\partial D(0, \frac{1}{2})$ tenemos 5 soluciones (contadas con multiplicidad) en el conjunto $A = D(0,1) - \bar{D}(0, \frac{1}{2})$.

b. Sean α y β dos curvas dadas por $\alpha(t) = e^{it}$ y $\beta(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Se considera $\gamma = P \circ \alpha$ y $\delta = p \circ \beta$. Calcular $Ind_\gamma(-1)$ y $Ind_\delta(-1)$ justificando cada paso.

El principio del argumento nos dice que el $Ind_{q \circ \alpha}(0)$ es igual a la cantidad de ceros de q contenidos en $D(0,1)$. Observamos además que

$$Ind_\gamma(-1) = \int_\gamma \frac{1}{z+1} dz = \int_\alpha \frac{p'(z)}{p(z)+1} dz =$$

$$\int_\alpha \frac{q'(z)}{q(z)}dz = Ind_{q\circ\alpha}(0) = 5$$

De forma análoga llegamos a $Ind_\beta(-1) = 0$.

Problema 2.

Probar que si f es una función entera no constante sin ceros entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ tal que $|z_n| \to +\infty$ y $f(z_n) \to 0$. Dar un ejemplo de una función y una sucesión que cumplan lo anterior.

Consideremos la función entera $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Como f no es constante tampoco lo es g y como consecuencia del teorema de Liouville g no puede ser acotada. Esto implica que existe una sucesión $\{z_n\}$ tal que $|g(w_n)| \to +\infty$, es decir $|f(w_n)| \to 0$. Si w_n es acotada entonces por Bolzano-Weierstrass tiene una subsucesión convergente $\{z_{w_k}\}$. Suponemos que $z_{w_k} \to a \in \mathbb{C}$, luego por continuidad de f se tiene

$$f(a) = lim f(w_{n_k}) = 0$$

lo que contradice la hipótesis. Luego la subsucesión no está acotada y por lo tanto tiene una subsucesión a la que llamamos $\{z_n\}$ que cumple $|z_n| \to +\infty$.

Ejemplo: $f(z) = e^z$, $z_n = -n$.

Problema 3.

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ una sucesión no constante, tal que $z_n \to \bar{z} \in \Omega$,

a. Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f \equiv 0$

Ver Teorico

b. Deducir que si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $f(z_n) = g(z_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f(z) = g(z)\ \forall z \in \Omega$

Aplicar la parte anterior a $h = f - g$.

c. Indicar si existe una función holomorfa en el disco unidad que cumpla $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3\ \forall n \in \mathbb{N}$

Supongamos que una tal función existe, llamemos D al disco unidad y consideremos la función h dada por $h(z) = z^3$, se cumple que $h(1/n) = 1/n^3 = f(1/n)$ y como la sucesión $1/n$ converge a 0, se deduce de la parte anterior que $f(z) = h(z)$, $\forall z \in D$ es decir que $f(z) = z^3\ \forall z \in D$ lo cual es absurdo pues $\left(\frac{-1}{n}\right)^3 \neq \frac{1}{n^3}$, no existe una función

-

Problema 4.

Calcular enunciando los resultado que utilice

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx$$

Consideremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+2)(z^2+1)}$ tiene polos simples en los puntos $\pm i$ y $\pm\sqrt{2}i$ consideremos ahora la curva cerrada simple Γ_R, orientada antihoraria formada por el segmento de recta real $[-R, R]$ y la semi circunferencia positiva de diámetro $-R, R$, γ_R. El teorema de los residuos permite asegurar que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Res_i f + Res_{\sqrt{2}i})$$

Por otra parte $Res_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2ei}$, y $Res(f)_{\sqrt{2}i(f)} = \lim_{z\to\sqrt{2}i}(z-\sqrt{2}i)f(z) = -\frac{1}{2e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}i}$ y por lo tanto

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \pi(Res_i(f) + Res_{\sqrt{2}i}(f)) = \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}$$

Por otro lado

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{[-R,0]} f(z)dz + \int_{[0,R]} f(z)dz$$

$$\int_{-R}^0 \frac{e^{it}}{(t^2+2)(t^2+1)}dt = -\int_{-R}^0 \frac{e^{-it}}{(t^2+2)(t^2+1)}dt = \int_0^R \frac{e^{-it}}{(t^2+2)(t^2+1)}dt$$

Donde en la primera igualdad se uso el cambio de variable $u = -t$

$$\int_{[0,R]} f(z)dz = \int_0^R \frac{e^{it}}{(t^2+2)(t^2+1)}dt$$

entonces

$$\int_{[-R,0]} f(z)dz + \int_0^R f(z)dz = \int_0^R \frac{e^{-it}+e^{it}}{(t^2+2)(t^2+1)}dt = 2\int_0^R \frac{\cos t}{(t^2+2)(t^2+1)}dt$$

entonces

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}} = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\int_0^R \frac{\cos t}{(t^2+2)(t^2+1)} + \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

tomando limite cuando $R \to +\infty$ y aplicando el lema de Jordan se observa que a la última integral tiende a 0 y por lo tanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t^2+2)(t^2+1)} = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}$$