Segundo parcial de Funciones de Variable Compleja.

5 de julio de 2013.

Núm. examen	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 5 puntos, con un máximo de 60. La duración del parcial es de 3 horas y media.

1. *a*) Sea $H(t)$ el escalón de Heaviside. Hallar la transformada de Laplace de $H(t)$ y su semiplano de convergencia, justificando todos los pasos.

   b) Sea $f(t)$ igual a e^t si $t \geq 0$, e igual a cero si $t < 0$. Hallar la transformada de Laplace de f y su semiplano de convergencia, justificando todos los pasos.

   c) Encontrar las transformadas de Laplace $X(p)$ e $Y(p)$ de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ que para todo $t > 0$ son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con datos iniciales:

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x - y &= e^t \\ \dot{y} - 2y &= H(t) \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

   d) Encontrar la solución $x(t), y(t)$ de la parte c) antitransformando $X(p)$ e $Y(p)$.

2. *a*) Enunciar el principio del módulo máximo.

   b) Demostrar el enunciado dado en la parte a).

   c) Sea $\mathcal{E}$ la elipse en el plano complejo, con centro en el origen, ejes paralelos a los ejes real e imaginario, y que pasa por los puntos $z_1 = 2$ y $z_2 = -3i$. Sea f cualquier función analítica en el disco abierto $D_4(0)$ de centro cero y radio 4, tal que

$$f(3i) = 1 + 2i, \quad |f(z)| \leq |f(3i)| \ \forall\ z \in \mathcal{E}.$$

   Probar que $f(0) \neq 1 - 2i$

   d) Sea g cualquier función analítica en $D_4(0)$ tal que

$$g(3i) = 1 + 2i, \quad |g(z)| = |g(3i)| \ \forall\ z \in \mathcal{E}, \quad g(0) = 1$$

   Probar que existe por lo menos un cero de g en la región encerrada por la elipse $\mathcal{E}$.
   (Sugerencia: Argumentar por absurdo; considerar $h(z) = 1/g(z)$.)

3. Sea $P(z) = z^8 - iz^6 - 8z^5 + (1 - i)z - 2 + 2i$.

   a) Probar que $P(z)$ tiene exactamente 5 raíces, (contadas con su multiplicidad) en el interior del disco D de centro 0 y radio 1.

4. Sea $f(z) = \dfrac{z^2 - z - 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$.

   a) Hallar los polos y ceros de f y sus órdenes (o multiplicidades).

   b) Hallar el residuo de f en cada uno de sus polos.

   c) Hallar $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ justificando todos los pasos.