Soluciones del segundo parcial de Funciones de Variable Compleja.

5 de julio de 2013.

Nota: Cada parte vale 5 puntos, con un máximo de 60 (son 12 partes en total)

Ejercicio 1 parte a)

$$\mathcal{L}(H(t)) = \int_0^{+\infty} H(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-pT} = \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_{t=0}^{=T} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\lim_{T\to+\infty} e^{-pT}. \tag{1}$$

$$e^{-pT} = e^{-\text{Re}(p)T}\cdot\big(\cos(\text{Im}(p)T) + i\,\text{sen}(\text{Im}(p)T)\big) \;\Rightarrow\; |e^{-pT}| = e^{-\text{Re}(p)T} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to+\infty}|e^{pT}| = \lim_{T\to+\infty} e^{-\text{Re}(p)T} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{Re}(p) > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \text{Re}(p) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to+\infty} e^{pT} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{Re}(p) > 0 \\ \nexists \text{ en } \mathbb{C} & \text{si} \quad \text{Re}(p) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Sustituyendo en la igualdad (1) concluimos:

$$\mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\cdot 0 = \frac{1}{p} \quad \forall\, p \text{ tal que } \text{Re}(p) > 0$$

y no existe si $\text{Re}(p) < 0$. Entonces, el semiplano de convergencia es el de todos los complejos p con parte real positiva.

Ejercicio 1 parte b) Usamos la siguiente propiedad general de la Transformada de Laplace:
Teorema (Transformada de Laplace del producto de una señal $f(t)$ por la exponencial $e^{\alpha t}$):
Si $\mathcal{L}(g(t))(p) = G(p)$ $\text{Re}(p) > s_c$, entonces:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}g(t)) = G(p-\alpha) \quad \text{Re}(p) > s_c + \text{Re}(\alpha).$$

Demostración: (Nota: no era necesario demostrar este teorema si se usaba y se enunciaba para resolver la parte b) de este ejercicio)

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}g(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}g(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-qt}\,dt = G(q) \quad \text{donde } q = p-\alpha.$$

Como por hipótesis la transformada de Laplace $G(q)$ de g converge en el semiplano de convergencia $\text{Re}(q) > s_c$, concluimos que

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}g(t))(p) = G(q) = G(p-\alpha) \text{ si } \text{Re}(p-\alpha) > s_c,$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}g(t))(p) = G(p-\alpha) \text{ si } \text{Re}(p) > s_c + \text{Re}(\alpha). \qquad \square$$

Hemos terminado de demostrar el teorema enunciado. Ahora, aplicando este teorema al caso particular $g(t) = H(t)$ y $\alpha = 1$, siendo la función dada $f(t) = e^t H(t)$, y usando la parte a), deducimos que

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(e^t H(t))(p) = \mathcal{L}(H(t))(p-1) = \frac{1}{p-1}, \qquad \text{Re}(p) > 0 + \text{Re}(1) = 1.$$

Concluimos que la transformada de Laplace de la función dada $f(t)$ es $1/p-1$ con semiplano de convergencia $\text{Re}(p) > 1$.

Ejercicio 1 parte c) Usamos el siguiente Teorema:

Teorema (Transformada de Laplace de la derivada de una señal)

Si $f(t)$ es una señal derivable cuya transformada de Laplace $F(p)$ existe en un semiplano de convergencia S_c, y si $\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t) = 0$ para todo complejo fijo en el semiplano de convergencia, entonces

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t))(p) = pF(p) - f(0).$$

Aplicando este Teorema, y tomando transformada de Laplace a ambos miembros del sistema de ecuaciones diferenciales dado (para $t > 0$), obtenemos:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) - 3X(p) - Y(p) & = & \dfrac{1}{p-1} \\ pY(p) - y(0) - 2Y(p) & = & \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

Sustituyendo los datos iniciales $x(0) = 1, y(0) = 0$, y despejando $X(p)$ e $Y(p)$ en función de p, resulta:

$$\begin{cases} Y(p) & = & \dfrac{1}{p(p-2)} = \dfrac{-1/2}{p} + \dfrac{1/2}{p-2} \\ X(p) & = & \dfrac{p^3 - 2p^2 + p - 1}{p(p-1)(p-2)(p-3)} = \dfrac{1/6}{p} + \dfrac{-1/2}{p-1} + \dfrac{-1/2}{p-2} + \dfrac{11/6}{p-3} \end{cases}$$

Ejercicio 1 parte d) Usamos la siguiente propiedad de la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha} \quad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha).$$

Antitransformamos las funciones $X(p)$ e $Y(p)$ halladas en la parte c), usando la propiedad anterior, y obtenemos:

$$\begin{cases} y(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{-1/2}{p} + \dfrac{1/2}{p-2}\Big) & = & -(1/2) + (1/2)e^{2t} \quad \forall t > 0, \\ x(t) & = & \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1/6}{p} + \dfrac{-1/2}{p-1} + \dfrac{-1/2}{p-2} + \dfrac{11/6}{p-3}\Big) & = & (1/6) - (1/2)e^{t} - (1/2)e^{2t} + (11/6)e^{3t} \quad \forall t > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 2 partes a) y b) Principio del módulo máximo. Ver libro de Teórico, capítulo 8, páginas 77 y 78, accesible en www.fing.edu.uy/imerl/varcompleja/2006/notas/Cauchy8.pdf

Ejercicio 2 parte c) Sea K la región compacta encerrada por la elipse $\mathcal{E}$ unión $\mathcal{E}$. La elipse $\mathcal{E}$ es el borde de K, y los puntos de la región abierta encerrada por la elipse, son el interior de K. Observamos que $K \subset D_4(0)$. Como f es analítica en el abierto $D_4(0)$, podemos aplicar el principio del módulo máximo (mejor dicho, un corolario de él), para deducir que:

$$\max_{z\in K} |f(z)| = \max_{z\in\mathcal{E}} |f(z)|. \tag{5}$$

Además el máximo de $|f(z)|$ cuando $z \in \mathcal{E}$ es mayor o igual que $|f(3i)|$ porque $3i$ es un punto particular de $\mathcal{E}$. Por otra parte $\max_{z\in\mathcal{E}} |f(z)| \leq |f(3i)|$ porque, por hipótesis, $|f(z)| \leq |f(3i)|$ para todo $z \in \mathcal{E}$. Deducimos que

$$\max_{z\in\mathcal{E}} |f(z)| = |f(3i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5}. \tag{6}$$

Reuniendo las igualdades (5) y (6) obtenemos

$$\max_{z\in K} |f(z)| = \sqrt{5}.$$

Por absurdo, supongamos que $f(0) = 1 - 2i$. Entonces

$$|f(0)| = |1 - 2i| = \sqrt{5} = \max_{z\in K} |f(z)|. \tag{7}$$

Como 0 está en el interior de K, de la igualdad (7) deducimos que $|f(z)|$ alcanza su máximo en K entre otros, en el punto $z = 0$, interior a K. Entonces, aplicando el principio del módulo máximo, $f(z)$ es constante para todo z en el abierto conexo $D_4(0)$. Luego, $f(3i) = f(0)$ porque $3i$ y 0 son puntos de $K \subset D_4(0)$. Es decir $1 + 2i = f(3i) = f(0) = 1 - 2i$, lo que implica $2 = -2$ que es una contradicción.

Ejercicio 3 parte d) Por hipótesis

$$|g(z)| = |g(3i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5} \quad \forall\, z \in \mathcal{E}. \tag{8}$$

Entonces g no se anula en los puntos de la elipse $\mathcal{E}$. Entonces no se anula en un entorno de cualquier punto de $\mathcal{E}$ (porque g es continua por ser analítica en $D_4(0)$). Llamemos V al abierto formado por todos esos entornos de los puntos de $\mathcal{E}$.

Supongamos por absurdo que g tampoco se anula en ningún punto de la región abierta U encerrada por $\mathcal{E}$. Entonces $h = 1/g$ es analítica en el abierto $V \cup U$, porque es cociente de funciones analíticas cuyo denominador no se anula en ese abierto. Entonces, aplicando el principio del módulo máximo a g y a h obtenemos:

$$\forall\, z \in U : \quad |g(z)| \leq \max_{z \in \mathcal{E}} |g(z)| = \sqrt{5}.$$

$$\forall\, z \in U : \quad |h(z)| \leq \max_{z \in \mathcal{E}} |h(z)| = \max_{z \in \mathcal{E}} \frac{1}{|g(z)|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

En particular $0 \in U$, luego

$$|g(0)| \leq \sqrt{5}, \quad h(0) = \frac{1}{|g(0)|} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como por hipótesis $g(0) = 1$ concluimos que

$$1 \leq \sqrt{5}, \quad 1 \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La última de estas dos desigualdades es una contradicción.

Ejercicio 3 parte a) El teorema de Rouché (aplicado a polinomios y a una curva de Jordan particular) afirma que si $P(z)$ y $Q(z)$ son dos polinomios, y en la circunferencia γ de radio 1 y centro 0 no se anulan y cumplen:

$$|P(z) + Q(z)| < |Q(z)| \quad \forall\, z \in \gamma, \tag{9}$$

entonces la cantidad de raíces de P (contadas con multiplicidad) encerradas por γ es igual a las de Q.

Aplicamos este Teorema de Rouché al polinomio $P(z)$ dado, tomando $Q(z) = 8z^5$:

$$|P(z)+Q(z)| = |z^8 - iz^6 - 8z^5 + (1-i)z - 2 + 2i + 8z^5| = |z^8 - iz^6 + (1-i)z + (-2+2i)| \leq |z|^8 + |i||z|^6 + |1-i||z| + |-2+2i|.$$

Si $z \in \gamma$ entonces $|z| = 1$. Sustituyendo en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$\forall\, z \in \gamma : \quad |P(z) + Q(z)| \leq 1^8 + 1^6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2} < 2 + 3 \cdot 2 = 8 = 8|z|^5 = |8z^5| = |Q(z)|.$$

Hemos probado que $P(z)$ y $Q(z)$ cumplen la desigualdad estricta (9) de la hipótesis del Teorema de Rouché. Entonces la cantidad de raíces de P, contadas con multiplicidad, encerradas por la circunferencia γ, es igual a las de Q, que son cinco.

Ejercicio 4 parte a) Los ceros de f son las raíces del polinomio $z^2 - z - 2$, que son $z_1 = 2, z_1 = -1$. Los polos de $f(z)$ son las raíces cuadradas complejas de las raíces del polinomio $w^2 + 10w + 9$, es decir las raíces cuadradas complejas de -1 y -9, que son $i, -i, 3i, -3i$. Entonces tenemos $f(z) = \dfrac{z^2 - z - 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \dfrac{(z-2)(z+1)}{(z-3i)(z+3i)(z-i)(z+i)}$, y el orden o multiplicidad de cada cero y de cada polo es 1.

Ejercicio 4 parte b) Una de las fórmulas del cálculo de residuo de f en un polo z_0, cuando este polo tiene multiplicidad 1, es:

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Aplicando esta fórmula a los cuatro polos $i, -i, 3i, -3i$ de f se obtiene:

$$\mathrm{Res}_f(i) = \frac{-1+3i}{16}, \quad \mathrm{Res}_f(-i) = \frac{-1-3i}{16}, \quad \mathrm{Res}_f(3i) = \frac{1-(11/3)i}{16}, \quad \mathrm{Res}_f(-3i) = \frac{1+(11/3)i}{16}.$$

Ejercicio 4 parte c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Sea

$$\gamma = [-R, +R]$$

la curva cerrada de Jordán, orientada en sentido antihorario formada por el segmento de recta real $[-R, R]$, con $R > 4$, unión la semicircunferencia S_R de centro en el origen y radio R en el semiplano de las partes imaginarias positivas. Esta semicircunferencia S_R está parametrizada por

$$z(t) = Re^{it} \ 0 \le t \le \pi.$$

La curva γ encierra solo a los polos i y $3i$ de f, y da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de ellos. Por el teorema de los residuos,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_f(i) + \mathrm{Res}_f(3i)\big) = 2\pi i\frac{-1+3i+1-11/3i}{16} = \frac{\pi}{12}.$$

Además

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{[-R,+R]} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{12}.$$

Luego:

$$\int_{[-R,+R]} f(z)\,dz = \frac{\pi}{12} - \int_{S_R} f(z)\,dz.$$

Sustituyendo en la igualdad (10), obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{12} - \lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz. \tag{11}$$

Ahora aplicamos el siguiente Lema de Jordan: Si $f(z)$ es continua en la circunferencia $S_R : z = Re^{it}, \ \ \theta_1 \le t \le \theta_2$ para todo R suficientemente grande, y si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L$, entonces

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = L(\theta_2 - \theta_1).$$

En nuestro caso $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, y $f(z) = (z^2 - z - 2)/(z^4 + 10z^2 + 9)$. Entonces

$$L = \lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z(z^2-z-2)}{z^4+10z^2+9} = \lim_{z\to\infty}\frac{(1/z)-(1/z^2)-(2/z^3)}{1+(10/z^2)+(9/z^4)} = 0.$$

Por lo tanto, aplicando el Lema de Jordan, obtenemos:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0(\pi - 0) = 0.$$

Finalmente, sustituyendo en la igualdad (11), concluimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{12} - \lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{12} - 0 = \frac{\pi}{12}.$$