Segundo Parcial de Función de Variable Compleja.

Curso 2012

Montevideo, sábado 7 de julio de 2012.

Parcial Nro:............... Apellido:... C.I.: ....

Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1 Demostrar que si una función holomorfa $f(z)$ posee un polo de orden 1 en $a \neq 0$ con residuo ρ, entonces si $k \in \mathbb{N}$ la función $g(z) = f(z)/z^k$ también posee un polo de orden 1 en a pero con residuo ρ/a^k.

Ejercicio 2 Para cada $a \in A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sea $\gamma_a : |z - a| = 1/3$ la circunferencia de centro a y radio $1/3$. Consideraremos una función $f : \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que si $C_n : |z| = n + 1/2$ es la circunferencia de centro 0 y radio $R_n = n + 1/2$, con $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{C_n} f(z)dz = 0.$$

a) Sea Γ_n ciclo [1] definido por $\Gamma_n = C_n - \sum_{a \in A : |a| < R_n} \gamma_a$. Hallar $B_n \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(w)dw}{w - z} \qquad \forall z \in B_n.$$

b) Demostrar que

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}}.$$

c) Demostrar que si f posee polos de orden 1 en los $a \in A$, con residuo ρ_a, entonces

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{a \in A} \frac{\rho_a}{a^{k+1}}.$$

(Sugerencia para esta parte: usar el Ejercicio 1.)

Ejercicio 3 Calcular las siguientes integrales usando el método de los residuos. Justifique cada paso.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + (\sin x)^2} \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/\pi}}{1 + x} dx$$

Ejercicio 4 Se considera la siguiente ecuación diferencial $x'' + 4x = 5e^t$ con condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 3$. Resolverla utilizando el método de la transformada de Laplace.

[1] Aclaración: las C_n y γ_n se suponen recorridas una sola vez y en sentido antihorario.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 **Solución:** Al ser a polo de orden 1 con residuo ρ si y solo si

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \rho$$

De donde

$$\lim_{z\to a} g(z)(z-a) = \rho/a^k$$

por ser $a \neq 0$, de donde a es polo de orden 1 con residuo ρ/a^k.

Ejercicio 2 **Solución:**

a) Basta ver los z donde el índice $n(\Gamma_n, z)$ vale 1. Eso solo puede ser dentro de C_n ya que pues fuera $n(C_n, z) = n(\gamma_a, z) = 0$ si $|a| < R_n$. Dichos z's deben también estar fuera de las γ_a con $|a| < R_n$, pues dentro de ellas $n(\Gamma_n, z) = 0$ pues C_n da una vuelta y $-\gamma_a$ otra en sentido contrario. Es decir

$$B_n = \{z : |z| < R_n, |z-a| > 1/3 \quad \forall a : |a| < R_n\}.$$

b) Obviamente 0 pertenece a B_n, pues $|0| = 0 < R_n$ y $|0-a| = |a| > 1/3 \forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Así que podemos usar la parte anterior, derivando bajo el signo de integral, lo cual se puede hacer por el teorema de representación, tenemos que

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{k+1}} \qquad \forall z \in B_n.$$

por lo tanto

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{f(w)dw}{w^{k+1}} \qquad \forall z \in B_n.$$

que es lo que se quería demostrar pero con otro nombre para la variable de integración.

c) De la parte anterior tenemos que

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_n} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}} - \sum_{a\in A:|a|<R_n} \int_{\gamma_a} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}}\right)$$

Por un lado

$$\int_{C_n} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}} = \int_{C_n} \frac{f(z)dz}{(n+1/2)^{k+1}} = \frac{\int_{C_n} f(z)dz}{(n+1/2)^{k+1}} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty, \text{ por hipótesis.}$$

Por el otro, sabemos que $f(z)/z^{k+1}$ posee polos de orden 1 en los $a \in A$ con residuo ρ/a^{k+1}, entonces

$$\sum_{a\in A:|a|<R_n} \int_{\gamma_a} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}} = \sum_{a\in A:|a|<R_n} 2\pi i \frac{\rho_a}{a^{k+1}} \to 2\pi i \sum_{a\in A} \frac{\rho_a}{a^{k+1}} \text{ cuando } n \to +\infty, \text{ pues } R_n \to +\infty.$$

Ejercicio 3 **Solución:**

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+(\sin x)^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+(\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+(\frac{z^2-1}{2iz})^2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{4}{-4z^2+(z^2-1)^2} izdz = \int_{|z|=1} \frac{4}{z^4-6z^2+1} izdz$$

Si γ es una raíz del denominador, entonces $\gamma^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$. De los dos números solo $3-2\sqrt{2}$ tiene módulo menor que 1, por lo tanto debemos calcular el residuo en $\gamma = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ y en

$-\gamma$.

$$\mathrm{Res}_\gamma = \frac{4i\gamma}{\left(\gamma^2-(3+2\sqrt{2})\right)(\gamma-(-\gamma))} = \frac{4i\gamma}{\left((3-2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\right)2\gamma} = \frac{2i}{-4\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}_{-\gamma} = \frac{4i(-\gamma)}{\left((-\gamma)^2-(3+2\sqrt{2})\right)(-\gamma-\gamma)} = \frac{4i\gamma}{\left(\gamma^2-(3+2\sqrt{2})\right)(\gamma+\gamma)} = \mathrm{Res}_\gamma = \frac{i}{-2\sqrt{2}}$$

Por el teorema de los residuos, entonces tenemos que:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\sin(x)^2} = \int_{|z|=1}\frac{4}{-4z^2+(z^2-1)^2}izdz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_\gamma+\mathrm{Res}_{-\gamma}\right) = 2\pi i 2\frac{i}{-2\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

Para resolver la integral $\int_0^{+\infty} x^{-1/\pi}/(1+x)dx$, primero observamos que la función

$$f(z) = \frac{z^{-1/\pi}}{1+z}$$

no está definida en todo el plano complejo, y tenemos que tomar la rama definida en $\mathbb{C}-[0,+\infty)$ con

$$z^{-1/\pi} = e^{-\log z/\pi} = e^{-(\log|z|+i\arg_{(0,2\pi)} z)/\pi} = |z|^{-1/\pi}e^{-i(\arg_{(0,2\pi)} z)/\pi}$$

Por tanto, integraremos f en un ojo de llave.

Notar que $f(z)$ tiene un sólo polo en el dominio, en $z=-1$, de orden uno, entonces $\mathrm{Res}_{-1}f = (-1)^{-1/\pi} = |-1|^{-1/\pi}e^{-i(\arg_{(0,2\pi)} -1)/\pi} = e^{-i\pi/\pi} = e^{-i}$.

Llamamos $I = \int_0^{+\infty} x^{-1/\pi}/(1+x)dx$, y $R>1$, consideramos los siguientes caminos: $\gamma_R, \gamma_{R^{-1}} : [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}] \to \mathbb{C}$ dados por $\gamma_R(t) = Re^{it}$ y $\gamma_{R^{-1}}(t) = R^{-1}e^{it}$ y $\alpha_R, \beta_R : [R^{-1}, R] \to \mathbb{C}$ dados por $\alpha_R(t) = (R+R^{-1}-t)e^{i(2\pi-R^{-1})}$ y $\beta_R(t) = te^{iR^{-1}}$.

Notar que $\Gamma_R = \gamma_R+\alpha_R+\gamma_{R^{-1}}+\beta_R$ es un "ojo de llave". Y además, el lema de deformación de caminos nos asegura que:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0 \text{ si } R\to+\infty$$

y lo mismo sucede con $\int_{\gamma_{R^{-1}}} f(z)d(z)$, pues $|z^{1/\pi}|\to 0$ si $|z|\to 0$.

También notar que:

$$\int_{\beta_R} f = \int_{R^{-1}}^R \frac{t^{-1/\pi}e^{-iR^{-1}/\pi}}{1+te^{iR^{-1}}}e^{iR^{-1}}dt = e^{i(-1/\pi+1)R^{-1}}\int_{R^{-1}}^R\frac{t^{-1/\pi}}{1+te^{iR^{-1}}}dt \text{ que tiende a } I \text{ cuando } R\to+\infty$$

$$\int_{\alpha_R} f = -e^{i(-1/\pi+1)(2\pi-R^{-1})}\int_{R^{-1}}^R\frac{t^{-1/\pi}}{1+te^{i(2\pi-R^{-1})}}dt \text{ que tiende a } -e^{i(1-1/\pi)2\pi}I = -e^{-2i}I \text{ cuando } R\to+\infty$$

Usando el teorema de los residuos se tiene que

$$I = \frac{2\pi i e^{-i}}{1-e^{-2i}} = \pi\frac{2i}{e^i-e^{-i}} = \frac{\pi}{\sin 1}.$$

Ejercicio 4 **Solución:** Usando la fórmula de derivación de la transformada de Laplace, sabemos que la solución de la ecuación cumple la siguiente igualdad:

$$s^2(\mathcal{L}x) - 3 + 4(\mathcal{L}x) = \frac{5}{s-1}$$

donde además, usamos $(\mathcal{L}e^t)(s) = 1/(s-1)$.

Entonces se tiene que:

$$(s^2+4)(\mathcal{L}x) = \frac{5}{s-1} + 3$$

y despejando:

$$(\mathcal{L}x) = \frac{5}{(s-1)(s^2+4)} + \frac{3}{s^2+4} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+4}$$

Despejando se obtiene que $A = 1$, $B = -1$ y $C = -1$ Obteniéndose así que:

$$(\mathcal{L}x) = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

Y por lo tanto, la solución es $x(t) = e^t - \cos(2t) + \sin(2t)$