Soluciones del Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja 27/06/2011

Ej.1 a) Enunciado y demostración del Teorema de Rouché: ver por ejemplo "*Funciones de Variable Compleja*", E.C.; Capítulo 15, Teorema 15.3.1 y su demostración en páginas 170 y 171.

Ej.1 b) $P(z) - Q(z) = (3+i)z^{10} + \sqrt{2}z^9 + (4-i)z^2 - 7iz + 1$ para todo z.

En particular si $|z| = 1$, $|z^n| = |z|^n = 1$ cualquiera sea el exponente natural $n \geq 1$. Luego, usando la propiedad triangular en la igualdad de arriba, si $|z| = 1$ se obtiene

$|P(z) - Q(z)| =\leq |(3+i)| + \sqrt{2} + |4-i| + |-7i| + 1 = \sqrt{10} + \sqrt{2} + \sqrt{17} + 7 + 1 < 4 + 2 + 5 + 7 + 1 = 19 = 19|z^8| < |(21-9i)||z^8| = |Q(z)|$.

Aplicando el teorema de Rouché, los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen la misma cantidad de ceros (contado cada uno con su multiplicidad) encerrados por la circunferencia $|z| = 1$. Como el polinomio $Q(z) = (21 - 9i)z^8$ tiene únicamente el cero $z = 0$ con multiplicidad 8, y está encerrado por la circunferencia $|z| = 1$, se deduce que $P(z)$ tiene exactamente 8 ceros contado cada uno con su multiplicidad, encerrados por la circunferencia $|z| = 1$.

Ej.2 a) Los polos de $f(z) = ze^{iz}/(1+z^2)^2$ son las raíces de $(1+z^2)^2$ pues ze^{iz} es holomorfa en todo el plano complejo. Siendo $(1+z^2)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$, los polos son $z = i,\ z = -i$, ambos con orden 2. Usando la fórmula de residuo:

$Res_f(i) = \lim_{z\to i}(f(z)(z-i)^2)' = \lim_{z\to i}(ze^{iz}/(z+i)^2)' = \lim_{z\to i} \dfrac{(1+iz)e^{iz}(z+i)^2 - 2ze^{iz}(z+i)}{(z+i)^4} = \dfrac{0 - 2i\,e^{-1}\,(+2i)}{16} = \dfrac{e^{-1}}{4}$.

$Res_f(-i) = \lim_{z\to -i}(f(z)(z+i)^2)' = \lim_{z\to -i}(ze^{iz}/(z-i)^2)' = \lim_{z\to -i} \dfrac{(1+iz)e^{iz}(z-i)^2 - 2ze^{iz}(z-i)}{(z-i)^4} = \dfrac{2\,e\,(-4) + 2i\,e\,(-2i)}{16} = \dfrac{-e}{4}$.

Ej.2 b). El índice $Ind_{\gamma_R}(i) = 1$ porque la curva γ_R da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de i. El índice $Ind_{\gamma_R}(-i) = 0$ porque la curva γ_R no da ninguna vuelta alrededor de $-i$. Usando el teorema de los residuos, y el cálculo de los residuos de la parte a):

$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i(\,Res_f(i)Ind_{\gamma_R}(i) + Res_f(-i)Ind_{\gamma_R}(-i)\,) = 2\pi i(e^{-1}/4) = (i\,\pi\,e^{-1})/2$.

Ej.2 c) Usaremos la siguiente versión del lema de Jordan (ver por ejemplo "*Funciones de Variable Compleja*", E.C.; Capítulo 9, Lema 9.2.2, última parte del enunciado, página 88): Sea $g(z)$ una función compleja continua para todo z complejo tal que $|z| \geq R_0$. Sea S_R la semi-circunferencia $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$, de radio $R \geq R_0$. Sea $s > 0$ constante real. Si $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, entonces $\lim_{R\to+\infty} \int S_R e^{ist} g(z)\,dz = 0$. Aplicaremos ese lema cuando $s = 1$ y $g(z) = z/(z^2+1)^2$. Se cumplen las hipótesis para $R_0 = 2$ pues $g(z)$ es continua si $|z| \geq 2$ (es derivable, entonces es continua), y además $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} z/(z^2+1)^2 = 0$. Entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} ze^{iz}/(z^2+1)^2\,dz = 0 = \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz.$$

Por otro lado, usando la parte b)

$$\frac{i\,\pi\,e^{-1}}{2} = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Luego, tomando límite cuando $R \to +\infty$ en la igualdad de arriba y usando que el límite de la integral en S_R es 0, resulta:

$$\frac{i\,\pi\,e^{-1}}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Cuando x es real: $Im(xe^{ix}/(x^2+1)^2) = Im(x\cos x + ix \operatorname{sen} x)/(x^2+1)^2 = x \operatorname{sen} x/(x^2+1)^2$. Luego, tomando parte imaginaria en la integral de arriba:

$$Im\left(\frac{i\,\pi\,e^{-1}}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} Im\left(\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}\right)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\frac{\pi\,e^{-1}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Ej.3 a) Por hipótesis: $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \quad \forall\ p$ tal que $Re(p)>a$. Entonces

$[\mathcal{L}(f(t-b))](p)=\int_0^{+\infty} f(t-b)e^{-pt}\,dt=\int_0^{b} f(t-b)e^{-pt}\,dt+\int_b^{+\infty} f(t-b)e^{-pt}\,dt$ La primera integral de la suma anterior es cero porque $f(t-b)=0$ para todo t tal que $t-b<0$, luego, para todo $t<b$, y esa integral está calculada para t en el intervalo $[0,b)$. La segunda integral, le aplicamos el cambio de variable real $u=t-b$. Luego $t=u+b$, la nueva variable u varía en el intervalo $[0,+\infty)$ cuando t varía en $[b,+\infty)$ y además $dt=du$. Queda:

$[\mathcal{L}(f(t-b))](p)=\int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+b)}\,du=e^{-pb}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}\,du=e^{-pb}\,[\mathcal{L}(f(t))](p)=e^{-pb}F(p)$ para todo p complejo tal que $Re(p)>a$.

Ej.3 b) $[\mathcal{L}(e^{tb}f(t))](p)=\int_0^{+\infty} e^{tb}f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-b)t}\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}\,dt=F(q)$ para todo q tal que $Re(q)>a$ donde $q=p-b$. Dicho de otra forma:

$[\mathcal{L}(e^{tb}f(t))](p)=F(p-b)$ para todo p tal que $Re(p-b)>a$, es decir $Re(p)>a+b$.

Ej.3 c) Usando la parte a) tenemos

$[\mathcal{L}(f(t-b))](p)=e^{-pb}F(p)=G(p)$ para todo p complejo tal que $Re(p)>a$. En la fórmula anterior $G(p)$ es la transformada de Laplace de $g(t)=f(t-b)$, y su semiplano de convergencia $Re(p)>a$.

Usando la parte b) tenemos

$[\mathcal{L}(e^{tb}g(t))](p)=G(p-b)$ para todo p complejo tal que $Re(p)>a+b$.

Entonces

$[\mathcal{L}(e^{tb}f(t-b))](p)=[\mathcal{L}(e^{tb}g(t))](p)=G(p-b)=G(q)|_{q=p-b}=e^{-qb}F(q)|_{q=p-b}=e^{-(p-b)b}F(p-b)=e^{-pb+b^2}F(p-b)$ para todo p complejo tal que $Re(p)>a+b$.

Ej.3 d) $\dot{x}-x=e^{2t}\ \ \forall\ t\geq 0, \quad x(0)=1.$

Llamando $X(p)$ a la transformada de Laplace (desconocida) de la función $x(t)$ (también desconocida), aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la Ecuación diferencial, y usando las fórmulas $[\mathcal{L}(\dot{x})](p)=pX(p)-x(0), \quad [\mathcal{L}(e^{2t})](p)=1/(p-2)$, queda:

$pX(p)-x(0)-X(p)=1/(p-2)$. Siendo $x(0)=1$ como dato inicial, resulta

$(p-1)X(p)-1=1/(p-2)$. Luego $(p-1)X(p)=1+1/(p-2)=(p-1)/(p-2)$. Despejando $X(p)$:

$$X(p)=\frac{(p-1)}{(p-1)(p-2)}=\frac{1}{p-2}=[\mathcal{L}(e^{2t})](p). \quad \text{Luego } x(t)=e^{2t}.$$