Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja.

24 de junio de 2010.

Núm. parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: La duración del parcial es de 3 horas. Se pueden utilizar los teoremas y resultados de teórico para probar y calcular lo que se pide, siempre y cuando se enuncie el teorema o resultado que se usará. Cada parte de cada ejercicio vale 5 puntos con un total máximo de 60 puntos.

1. *a*) Enunciar el principio del módulo máximo.

   b) Demostrarlo.

   c) Sea $D_1(0)$ el disco abierto de centro 0 y radio 1. Sea $f : D_1(0) \mapsto \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(0) = 5i$, $\quad f(e^{it}/2) = 3 + 4i$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que $f \notin H(D_1(0))$.

2. Sea para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \neq 0$ la función

$$f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}\,.$$

   a) Calcular los residuos de $f(z)$ en cada uno de sus polos.

   b) Sea la curva $\gamma = [-Ri, Ri] - S_R$, con la orientación de γ en sentido *horario,* donde $R > 2$ es un número real, $[-Ri, Ri]$ es el segmento del eje imaginario $\{z = it : t \in \mathbb{R},\ -R \leq t \leq R\}$, y S_R es la semicircunferencia $z = \{Re^{it} : t \in \mathbb{R},\ -(\pi/2) \leq t \leq \pi/2\}$.

   Calcular

$$I = \int_\gamma f(z)\,dz$$

   c) Calcular $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz$.

   d) Justificando todos los pasos, calcular:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-Ri,Ri]} f(z)\,dz.$$

3. Sea α una constante real. Sea $g(t)$ la función real de variable real t, que es nula para $t < 0$ y tal que $g(t) = te^{\alpha t}$ si $t \geq 0$.

   a) Hallar la transformada de Laplace $G(p)$ de g, y la región del plano complejo donde está definida (justificar todos los cálculos).

   b) Sea la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 27te^{2t}, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = -1.$$

   Probar que la transformada de Laplace $X(p)$ de $x(t)$ es:

$$X(p) = \frac{3}{(p-2)^2} - \frac{2}{p-2} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1}$$

   c) Hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con condiciones iniciales de la parte anterior.

4. Sea el polinomio:

$$p\,(z) = 4z^4 + 2z^2 + z + 9\,.$$

   a) Hallar $R_1 > 0$ de forma que en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_1\}$ se encuentren todas las raíces del polinomio p (justificar la elección).

   b) Hallar $R_2 > 0$ y $R_1 > R_2$ de forma que en el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1\}$ se encuentren todas las raíces del polinomio p (justificar la elección).