Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja.
Soluciones.

24 de junio de 2010.

Ejercicio 1. **(a)** Enunciar el principio del módulo máximo. **(b)** Demostrarlo. **Respuestas a) y b):** Ver libro de teórico.

(c) Sea $D_1(0)$ el disco abierto de centro 0 y radio 1. Sea $f : D_1(0) \mapsto \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(0) = 5i$, $f(e^{it}/2) = 3 + 4i$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que $f \notin H(D_1(0))$. **Respuesta c):** Por absurdo, suponemos $f \in H(D_1(0))$. Para todo $z \in \partial D_{1/2}(0)$, $z = e^{it}/2 \Rightarrow |f(z)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Por el principio del módulo máximo: el máximo de $|f(z)|$ en $\overline{D_{1/2}(0)}$ se alcanza en $\partial D_{1/2}(0)$. Luego, el máximo de $|f(z)|$ en $\overline{D_{1/2}(0)}$ es igual a 5. Además $|f(0)| = |5i| = 5$. Entonces $|f(0)|$ es máximo local (porque es igual al máximo de $|f(z)|$ en $\overline{D_{1/2}(0)}$). Por el principio del módulo máximo, siendo $f \in H(D_1(0))$ y teniendo en máximo local en $z_0 \in D_1(0)$, debería ser constante $\forall\ z \in D_1(0)$; en particular $f(0) = f(1/2)$. Pero $f(0) = 5i$ y $f(1/2) = 3 + 4i$, luego $5i = 3 + 4i$, lo que es absurdo. $\square$

Ejercicio 2. Sea para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \neq 0$ la función $f(z) = \dfrac{z^2 - z - 2}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$.
a) Calcular los residuos de $f(z)$ en cada uno de sus polos. **Respuesta a):** Los polos son las raíces de $z^3-3z^2+3z-1 = (z-1)^3$. Hay un solo polo $w_0 = 1$, de orden 3: $f(z) = g(z)/(z-1)^3$ donde $g(z) = z^2-z-2$. Por la fórmula de cálculo del residuos en un polo de orden k: $Res_f(w_0) = g^{(k-1)}(w_0)/(k-1)!$. Luego $Res_f(1) = g''(1)/2 = 1$.

b) Sea la curva $\gamma = [-Ri, Ri] - S_R$, con la orientación de γ en sentido *horario,* donde $R > 2$ es un número real, $[-Ri, Ri]$ es el segmento del eje imaginario $\{z = it : t \in \mathbb{R},\ -R \leq t \leq R\}$, y S_R es la semicircunferencia $z = \{Re^{it} : t \in \mathbb{R},\ -(\pi/2) \leq t \leq \pi/2\}$. **Respuesta b):** La curva γ no pasa por el único polo $w_0 = 1$ (triple) de f. Además $Ind_\gamma(w_0) = -1$. Aplicando el teorema de los residuos:
$I = 2\pi i \sum_{w_j \text{ polo de } f} Res_f w_j \cdot Ind_\gamma(w_j) = 2\pi i Res_f w_0 \cdot Ind_\gamma(w_0) = 2\pi i(1 \cdot (-1)) = -2\pi i.$

c) Calcular $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz$. **Respuesta c):** $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \dfrac{z(z^2 - z - 2)}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} = 1 = L$. Usando el lema de Jordan o de deformación de curvas, para la semicircunferencia S_R dada en la parte b), orientada para t creciente con $= -\pi/2 = \theta_0 \leq t \leq \theta_1 = \pi/2$: $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = Li(\theta_1 - \theta_0) = \pi i$.

d) Calcular, justificando todos los pasos, la integral impropia compleja
$\int_{-\infty i}^{+\infty i} f(z)\, dz := \lim_{R\to+\infty} \int_{[-Ri,Ri]} f(z)\, dz$. **Respuesta d):** Usando la parte b)

$$-2\pi i = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_{[-Ri,Ri]} f(z)\, dz - \int_{S_R} f(z)\, dz \;\Rightarrow\; \int_{[-Ri,Ri]} f(z)\, dz = -2\pi i + \int_{S_R} f(z)\, dz.$$

Tomando límites cuando $R \to +\infty$ y usando la parte c)

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} f(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-Ri,Ri]} f(z)\, dz = -2\pi i + \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = -2\pi i + \pi i = -\pi i.$$

Ejercicio 3. **a)** Sea α una constante real. Sea $g(t)$ la función real de variable real t, nula para $t < 0$ y tal que $g(t) = te^{\alpha t}$ si $t \geq 0$. Hallar la transformada de Laplace $G(p)$ de g, y la región del plano complejo donde está definida. **Respuesta a)** Sea $f(t)$ nula para $t < 0$ y tal que $f(t) = e^{\alpha t}$ si $t \geq 0$. Su transformada de Laplace es

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, e^{-pt}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{(\alpha-p)t}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-p)T-1}}{\alpha - p} = \frac{1}{p - \alpha} \text{ si } Re(\alpha - p) < 0,$$

pues $|e^{(\alpha-p)T}| = e^{Re(\alpha-p)T} = e^{(\alpha-Re(p))T} \to 0$ cuando $T \to +\infty$. Concluimos que $F(p) = 1/(p - \alpha)$ para todo complejo p tal que $Re(p) > \alpha$ (por hipótesis α es real). Por otro lado si $Re(p) < \alpha$, entonces

$|e^{(\alpha-p)T}| = e^{Re(\alpha-p)T} = e^{(\alpha-Re(p))T} \to +\infty$ cuando $T \to +\infty$, y entonces la integral impropia calculada antes no converge. Por lo tanto el semiplano de convergencia de la transformada de Laplace $F(p) = 1/(p-\alpha)$ de $f(t) = e^{\alpha t}$ es $Re(p) > \alpha$. Ahora calculemos la transformada de Laplace $G(p)$ de $g(t) = te^{\alpha t}$. El teorema de analiticidad de la transformada de Laplace $F(p)$, y la fórmula de su derivada, tienen el siguiente enuciado:

Si $F(p)$ en el semiplano abierto de convergencia S_c es la transformada de Laplace de una función transformable $f(t)$, entonces F es analítica en S_c y su derivada $F'(p)$ es la transformada de Laplace en el mismo semiplano de convergencia S_c de la función $-tf(t)$.

Usando dicho teorema, aplicado en el caso particular calculado anteriormente: $F(p) = \dfrac{1}{p-\alpha} = \mathcal{L}(e^{\alpha t}) \Rightarrow F'(p) = \dfrac{-1}{(p-\alpha)^2} = -\mathcal{L}(te^{\alpha t})$. Luego si $g(t) = te^{\alpha t}$, su transformada de Laplace es $G(p) = \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$ en el semiplano de convergencia $Re(p) > \alpha$ (por hipótesis α es real).

Otra forma de resolución: Calcular directamente la integral impropia siguiente y su semiplano de convergencia: $G(p) = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T te^{\alpha t}e^{-pt}\,dt$. Usando integración por partes $\int_0^T te^{\alpha t}e^{-pt}\,dt = \int_0^T te^{-(p-\alpha)t}\,dt = -\dfrac{1}{p-\alpha}\left(Te^{-(p-\alpha)T} - \displaystyle\int_0^T e^{-(p-\alpha)t}\,dt\right) = -\dfrac{1}{p-\alpha}Te^{-(p-\alpha)T} + \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}\left(1 - e^{-(p-\alpha)T}\right)$. Ahora, hay que probar igual que como está expuesto más arriba que $\lim_{T\to+\infty} e^{-(p-\alpha)T} = 0$ si $Re(p) > \alpha$ (recordar que α por hipótesis es real), y que ese límite no existe (el módulo tiende a infinito) si $Re(p) < \alpha$. Entonces el semiplano de convergencia es $Re(p) > \alpha$, y la tranformada de Laplace $G(p)$ en ese semiplano, es el límite cuando $T \to +\infty$ del valor de la integral $\int_0^T te^{\alpha t}e^{-pt}\,dt$ calculada antes: $G(p) = \lim_{T\to+\infty} -\dfrac{1}{p-\alpha}Te^{-(p-\alpha)T} + \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}\left(1 - e^{-(p-\alpha)T}\right) = \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$.

b) Sea la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales: $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 27te^{2t}$, $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = -1$. Probar que la transformada de Laplace $X(p)$ de $x(t)$ es $X(p) = \dfrac{3}{(p-2)^2} - \dfrac{2}{p-2} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{2}{p+1}$.

Respuesta b) Sea $X(p) = \mathcal{L}(x(t))$. Por la fórmula de transformada de Laplace de la derivada $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = pX(p) - x(0),\ \ \mathcal{L}(\ddot{x}) = p(pX(p) - x(0)) - \dot{x}(0)$. Luego $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = pX(p),\ \ \mathcal{L}(\ddot{x}) = p^2X(p) + 1$. Tomando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$p^2X(p) + 1 + 2pX(p) + X(p) = \ 27\mathcal{L}(te^{2t}) = \frac{27}{(p-2)^2} \ \Rightarrow$$

$$(p^2 + 2p + 1)X(p) = \frac{27}{(p-2)^2} - 1 = \frac{27 - (p-2)^2}{(p-2)^2}$$

$$X(p) = \frac{27 - (p-2)^2}{(p-2)^2(p+1)^2}$$

Falta solo probar que

$$¿\frac{27 - (p-2)^2}{(p-2)^2(p+1)^2} = \frac{3}{(p-2)^2} - \frac{2}{p-2} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1}?.$$

Multiplicando por $(p-2)^2(p+1)^2$:

$$¿27 - (p-2)^2 = \ 3(p+1)^2 - 2(p-2)(p+1)^2 + 2(p-2)^2 + 2(p+1)(p-2)^2?.$$

El polinomio de la izquierda $P(p) = 27 - (p-2)^2$ es de grado 2. El polinomio de la derecha $Q(p)$ es de grado dos o menor (pues los coeficientes de los términos que continen la potencia p^3 son -2 y $+2$, que se cancelan). Luego la diferencia $R(p) = P(p) - Q(p)$ de los dos polinomios es un polinomio de grado 2 o menor. Por el teorema fundamental del álgebra, $R(p)$ tiene 2 o menos raíces complejas (contando cada una con su multiplicidad). Dicho de otra forma, si $R(p)$ tuviera tres o más raíces complejas, entonces sería idénticamente nulo. Basta pues demostrar que el polinomio $R(p)$ se anula por lo menos para tres valores distintos de p (cualesquiera tres que se elijan sirven). Probando con $p = 0, \quad -1$ y 2, sustituimos $p = 0$ y queda: $R(0) = P(0) - Q(0) = (27 - 4) - (3 + 4 + 8 + 8) = 23 - 23 = 0$. Sustituyendo $p = -1$ queda: $R(-1) = P(-1) - Q(-1) = (27 - 9) - (2 \cdot 9) = 18 - 18 = 0$. Sustituyendo $p = 2$ queda: $R(2) = P(2) - Q(2) = (27 - 0) - (3 \cdot 9) = 27 - 27 = 0$. Luego $R(p) \equiv 0$. $\square$

c) Hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con condiciones iniciales de la parte b). **Respuesta c)** Por la parte b) tenemos

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p-2)^2} - \frac{2}{p-2} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1}\right).$$

Usando la parte a) se tiene $\mathcal{L}^{-1}(1/(p-\alpha)^2) = te^{\alpha t}, \;\; \mathcal{L}^{-1}(1/(p-\alpha)) = e^{\alpha t}$. Luego, por la linealidad de la transformada de Laplace, se deduce la linealidad de su antitransformada, y se obtiene $x(t) = 3te^{2t} - 2e^{2t} + 2te^{-t} + 2e^{-t}$.

Ejercicio 4. Sea el polinomio $p(z) = 4z^4 + 2z^2 + z + 9$. **Parte a)** Hallar $R_1 > 0$ de forma que en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_1\}$ se encuentren todas las raíces del polinomio p (justificar la elección). **Respuesta a)** El teorema de Rouché enuncia: Si $p(z)$ y $q(z)$ son funciones meromorfas (en particular analíticas) en $\mathbb{C}$ y si γ es una curva cerrada de Jordan que no pasa por los ceros ni por los polos de $p(z)$ y $q(z)$ y si para todo $z \in \gamma$ se cumple $|p(z) - q(z)| < |q(z)|$, entonces la diferencia entre cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f, encerrados por la curva γ y contado cada uno tantas veces como su orden, es igual a la diferencia respectiva para g.

Sea $q(z) = 4z^4$. Deseamos comparar $p(z)$ con $q(z) = 4z^4$, que tiene una raíz cuádruple $z_0 = 0$, luego exactamente 4 raíces complejas (contándolas con su multiplicidad) en el círculo $|z| < R_1$, para cualquier valor fijo $R_1 > 0$. Por el teorema de Rouché, si conseguimos probar que $|p(z) - q(z)| < |q(z)|$ para todo z tal que $|z| = R_1$, tendremos que $p(z)$, (que es un polinomio de grado 4), tiene todas sus raíces en el círculo $|z| < R_1$ como se desea. Aplicando el teorema de Rouché a la circunferencia $|z| = R_1$: $|p(z) - q(z)| = |2z^2 + z + 9| \leq 2|z|^2 + |z| + 9 \leq 2R_1^2 + R_1 + 9, \quad |q(z)| = |4z^4| = 4|z|^4 = 4R_1^4$. Luego, para probar que $|p(z) - q(z)| < |q(z)|$ si $|z| = R_1$, basta encontrar $R_1 > 0$ tal que que $2R_1^2 + R_1 + 9 < 4R_1$. Por ejemplo, si elegimos $R_1 = 2$ se cumple $2R_1^2 + R_1 + 9 = 8 + 2 + 9 = 19 < 4R_1 = 8$. Concluimos que las cuatro raíces complejas de $p(z)$ (contadas con su multiplicidad) están contenidas en el círculo $\{|z| < 2\}$. Por lo tanto el valor real $R_1 = 2$ es una solución al problema planteado.

Parte b) Hallar $R_2 > 0$ y $R_1 > R_2$ de forma que en el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z| < R_1\}$ se encuentren todas las raíces del polinomio p (justificar la elección). **Respuesta b)** Por la parte a) elegimos $R_1 = 2$. Busquemos entonces un valor de R_2 tal que $0 < R_2 < 2$ y tal que en el círculo $\{|z| \leq R_2\}$ no exista ninguna raíz del polinomio $p(z)$. Comparemos con el polinomio $r(z) = z + 9$. Este polinomio tiene una sola raíz simple -9, por lo tanto no tiene ninguna raíz en el círcuclo $|z| < R_2$, para ningún valor fijo R_2 que se elija tal que $0 < R_2 < 2$. Por el teorema de Rouché, si conseguimos probar que $|p(z) - r(z)| < |r(z)|$ para todo z tal que $|z| < R_2$, tendremos que $p(z)$ no tiene ninguna de sus raíces en el círculo $|z| = R_2$ como se desea. Aplicando el teorema de Rouché a la circunferencia $|z| = R_2$: $|p(z) - r(z)| = |4z^4 + 2z^2| \leq 4|z|^4 + 2|z|^2 \leq 4R_2^4 + 2R_2^2, \quad |r(z)| = |z+9| = |z| + 9 = R_2 + 9$. Luego, para probar que $|p(z) - r(z)| < |r(z)|$ si $|z| = R_2 < 2$, basta encontrar $R_2 > 0, R_2 < 2$ tal que que $4R_2^4 + 2R_2^2 < R_2 + 9$. Por ejemplo, si elegimos $R_2 = 1$ se cumple $4R_2^4 + 2R_1^2 = 6 < R_2 + 9 = 10$. Deducimos que ninguna de las raíces complejas de $p(z)$ está incluida en el círculo $|z| < 1$. Tampoco están en la circunferencia $|z| = 1$ pues cuando $|z| = 1 = R_1$, acabamos de probar que $|p(z) - r(z)| < |r(z)|$ y por lo tanto $p(z) \neq 0$ (si $p(z)$ fuera nulo se cumpliría la igualdad $|p(z) - r(z)| = |r(z)|$). Juntando con el resultado de la parte a), concluimos que las cuatro raíces complejas de $p(z)$ (contadas con su multiplicidad) están contenidas en la corona $\{1 < |z| < 2\}$. Por lo tanto los valores reales $R_1 = 2, R_2 = 1$ son una solución al problema planteado.