Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

26 de junio de 2009

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
Soluciones del Segundo Parcial

I. Sea Ω un conjunto abierto y conexo del plano complejo, y $f \in H(\Omega)$.

1. (Principio del mínimo) Probar que si f no es constante y no tiene ceros en Ω entonces $|f|$ no tiene mínimo. Deducir que $|f|$ tampoco admite mínimos locales.
2. Deducir que si f es como en el ítem anterior, entonces para todo $K \subset \Omega$ conjunto compacto, el mínimo de $|f|$ se alcanza en ∂K.

   En lo que sigue supondremos que f no es constante, y que $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \subset \Omega$.

3. Mostrar que si $|f|$ es constante en ∂D entonces f tiene el menos un cero en D.
4. Supongamos que $|f(z)| = 1$ cada vez que $|z| = 1$. Probar que existe una constante $a \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega$ se cumple
$$f(z) = a \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z)$$
donde α_j, $j = 1, ..., m$ son los ceros de f en D (contados con multiplicidad), y
$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} .$$
5. Obtener las funciones enteras tales que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

I. SOLUCIÓN

1. Como f no tiene ceros en Ω, $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en Ω. En sencillo ver que si $|f|$ tiene un mínimo en $a \in \Omega$, entonces $|g|$ tendrá un máximo en a. La afirmación recíproca también es cierta: si $|g|$ tiene un máximo en a, entonces $|f|$ tiene un mínimo en a.

   Ahora, g es holomorfa y no constante, por tanto vale el principio de módulo máximo, y $|g|$ no tiene máximo en Ω, por tanto $|f|$ no tiene mínimos en Ω. Tampoco puede suceder que $|f|$ tenga mínimos relativos, pues estos serían mínimos absolutos en un entorno abierto, y allí también vale lo que hemos probado.

2. Como $K \subset \Omega$ es compacto y $|f|$ continua sabemos que $|f|$ tiene mínimo (absoluto) en K por el teorema de Weierstrass. Este mínimo puede estar en el interior de K o ∂K. Lo primero es imposible, pues si se es mínimo absoluto se es mínimo relativo, y como f cumple el principio del minímo, tales no existen. Entonces sólo queda la alternativa de que el mínimo esté en $\partial\Omega$.

3. Ahora tenemos que f es holomorfa en una región que contiene al disco unitario cerrado (que notamos D). Si f no tiene ceros en D vale el principio del módulo mínimo en el enunciado del ítem 2, el mínimo de $|f|$ se alcanza en ∂D. Pero también vale el principio del módulo máximo, que nos dice que el máximo de $|f|$ también se alcanza en ∂D. Por tanto, como $|f|$ es constante en la frontera el mínimo y el máximo de $|f|$ deben coincidir y por tanto $|f|$ es constante y entonces f es constante. Absurdo. Entonces f debe tener algún cero en D.

4. Estamos en las hipótesis del ítem anterior, pues $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$, entonces f tiene ceros en D, los que llamamos $\alpha_1 \dots \alpha_m$ (contados con multiplicidad). Por tanto
$$f(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_m)\psi(z),$$

con ψ una función holomorfa que no se anula en el disco cerrado.

Para probar lo que se pide veremos que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{\left|\prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z)\right|} = \frac{|f(z)|}{\prod_{j=1}^{m} |\varphi_{\alpha_j}(z)|},$$

es constante en D. Ahora g se puede escribir en D como $g(z) = \psi(z) \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha_j} z)$, por tanto es holomorfa en el disco y no tiene ceros, pues ψ no se anula en él, y los factores $1 - \overline{\alpha_j} z$ se anulan en $1/\overline{\alpha_j}$ que está fuera del disco unitario ($|\alpha_j| < 1$). Para calcular $|g|$ sobre ∂D observar que $\varphi_\alpha(\partial D) = \partial D$ y $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Una manera de probar afirmación anterior es observar que φ_α es de Moebius y que

$$|\varphi_\alpha(1)| = |\varphi_\alpha(-1)| = |\varphi_\alpha(i)| = 1.$$

Utilizando este hecho se prueba que $|g| = 1$ en D, y por tanto como es holomorfa, $g(z) = a$ en D, con $|a| = 1$, lo que sifnifica que en D

$$f(z) = a \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z).$$

Llamemos $h(z)$ a la expresión del lado derecho de la igualdad.

Para finalizar sólo resta probar la igualdad en todo Ω. Observemos que h y f son funciones holomorfas que coinciden en un conjunto abierto (que contiene un punto de acumulación), y entonces coinciden en todo Ω.

5. Si f es entera significa que $\Omega = \mathbb{C}$, por lo anterior la expresión

$$f(z) = a \prod_{j=1}^{m} \varphi_{\alpha_j}(z),$$

valdría en todo $\mathbb{C}$, lo que no tiene sentido salvo que $\alpha_j = 0$ para todo j, porque en caso contrario, la función f tendría una singularidad en $1/\overline{\alpha_j}$, lo que es absurdo porque es entera. Entonces $\alpha_j = 0$ para todo j, y por tanto $f(z) = az^m$ donde $|a| = 1$ y m es la cantidad de ceros de f en el disco (que son todos los ceros de f).

II. Calcular las siguientes integrales por el método de los residuos, y justificando el procedimiento.

1.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + sen^2 x}, \quad a > 0.$$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

1. Veamos que

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a + sen^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}.$$

Observemos que I_1 es la cuarta parte de la integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + sen^2 x}$. Ya sabemos como pasar de esta última integral de Riemann a una integral sobre la circunferencia unitaria de un cociente de polinomios. En efecto haciendo las cuentas conocidas y que por ello omitimos se obtiene que:

$$I_1 = -i \int_{|z|=1} \frac{z}{-z^4 + (4a+2)z^2 - 1}\, dz.$$

Ahora procederemos a calcular la última integral mediante el teorema de residuos.

Haciendo un cambio de variable $u = z^2$ en el denominador del integrando, podemos ver que los polos del mismo cumplen que: $z^2 = 2a + 1 \pm 2\sqrt{a(a+1)}$.

En sencillo ver que si se elige $z^2 = 2a + 1 + 2\sqrt{a(a+1)}$, $|z| > 1$ y por tanto los polos están fuera del disco unitario. Si $z^2 = 2a + 1 - 2\sqrt{a(a+1)}$, $|z| < 1$, para ello alcanza con observar que $2a < 2\sqrt{a(a+1)}$. Por tanto los polos serán α y $-\alpha$, donde

$$\alpha = \sqrt{2a + 1 - 2\sqrt{a(a+1)}}\,.$$

Con esto se prueba que $I_1 = 2\pi(Res_\alpha(f) + Res_{-\alpha}(f))$.

Por simplicidad notemos con γ y $-\gamma$ a los otros polos del integrando (los que están fuera del disco unidad). Entonces

$$f(z) = \frac{z}{-(z-\alpha)(z+\alpha)(z-\gamma)(z+\gamma)} = \frac{-z}{(z-\alpha)(z+\alpha)(z^2-\gamma^2)}\,.$$

Es sencillo entonces calcular el residuo en α:

$$Res_\alpha(f) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \frac{-\alpha}{2\alpha(\alpha^2-\gamma^2)} = \frac{1}{8\sqrt{a(a+1)}}\,.$$

De la misma manera:

$$Res_{-\alpha}(f) = \frac{1}{8\sqrt{a(a+1)}}.$$

En resumen: $I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}$.

2. Ahora veamos que:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx = \frac{5\pi}{12}.$$

Para ello extendemos el integrando como $f(z) = (z^2 - z + 2)/(z^4 + 10z^2 + 9)$. Observemos que $I_2 = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\, dz$.

Sea $\gamma_R = \{z : z = Re^{it},\ t \in [0, \pi]\}$, la semicircunferencia centrada en el origen y de radio R en el semiplano superior. Recordemos el lema de deformación de caminos[1] que dice que si f es continua en un conjunto Ω que contiene a γ_R para todo R mayor que cierto R_0, y si $\lim_{z\to+\infty} zf(z) = L$, entonces

$$\lim_{\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \pi i L.$$

La función f tiene cuatro polos simples, en i, $-i$, $3i$ y $-3i$.

Entonces como f está en las hipótesis del lema de deformación de caminos y $L = 0$, aplicando este lema y el teorema de residuos, se tiene que

$$I_2 = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i(Res_i(f) + Res_{3i}(f))\,.$$

Omitimos el cálculo de los residuos que es sencillo de realizar (ya tenemos la factorización de denominador por ejemplo). $Res_i(f) = -(i + 1)/16$ y $Res_{3i}(f) = (3 - 7i)/48$, por tanto $I_2 = 5\pi/12$.

III. Resolver utilizando la transformada de Laplace la ecuación diferencial (m, k y ω son constantes positivas)

$$my'' + ky = \cos(\omega t)\,,$$
$$y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1\,.$$

[1] Práctico 6, ejercicio 10, parte b.

1. Llamemos $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, entonces la ecuación a resolver puede expresarse como: $y'' + \frac{1}{m}y = \frac{1}{m}\cos(\omega t)$. Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace (linealidad, y fórmula para la derivada), se puede ver que:

$$(p^2+\omega_0^2)L(y)(p) = \frac{1}{m}\frac{p}{p^2+\omega^2} + 1\,,$$

y por tanto

$$L(y)(p) = \frac{1}{m}\frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)} + \frac{1}{p^2+\omega_0^2}.$$

Ahora si $\omega_0 \neq \omega$, se tiene que :

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)} = \frac{A}{p^2+\omega^2} + \frac{B}{p^2+\omega_0^2}\,,$$

resolviendo el sistema para hallar A y B, tenemos que: $A = \frac{-1}{\omega^2-\omega_0^2}$, y $B = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}$.

Utilizando la expresión de $L(y)(p)$, la descomposición en fracciones simples y aplicando L^{-1}:

$$\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{A}{m}L^{-1}(\tfrac{p}{p^2+\omega^2}) + \tfrac{B}{m}L^{-1}(\tfrac{p}{p^2+\omega_0^2}) + \omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t) \\ &= \tfrac{1}{m(\omega^2-\omega_0^2)}\left[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right] + \omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Si $\omega_0 = \omega$, $L(y)(p) = \frac{1}{m}\frac{p}{(p^2+\omega_0^2)^2} + \frac{1}{p^2+\omega_0^2}$, por tanto

$$y(t) = \frac{1}{m}\,L^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+\omega_0^2)^2}\right) + \omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Ahora:

$$\left(\frac{p}{(p^2+\omega_0^2)^2}\right) = \left(\frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right)\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\right) = \frac{1}{\omega_0}\left(\cos(\omega_0 t) * \operatorname{sen}(\omega_0 t)\right).$$

Esta convulución se calcula utilizando por ejemplo: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$, e integración por partes y sustitución. En definitiva:

$$\cos(\omega_0 t) * \operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{\omega_0}\,\cos(\omega_0 t)\operatorname{sen}^2(\omega_0 t) - \frac{t}{2}\operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_0^2}\,\cos(\omega_0 t)\operatorname{sen}^2(\omega_0 t) - \frac{t}{2m\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \omega_0\operatorname{sen}(\omega_0 t).$$