Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja.

Martes 3 de julio de 2007.

Núm. parcial	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c	Total

- El parcial consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 12 partes en total; cada parte vale 5 puntos, sumando un total de 60 puntos. No hay puntajes negativos.
- La duración del parcial es de 3 horas y media. Durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.
- El mínimo para aprobar el curso es de 25 puntos y el mínimo para exonerar del examen es de 60 puntos; ambos mínimos son en la suma de los dos parciales.

1. Sea
$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}.$$

   a) Encontrar los residuos de f en cada uno de sus polos.

   Sea S_R la semicircunferencia de radio $R > 0$ parametrizada por
   $S_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$.

   b) Enunciar y aplicar el lema de deformación de curvas para calcular
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz$$

   c) Calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx.$$

   d) Probar que $\int_{S_R} f(z)\,dz \neq 0$ para todo $R > 3$.
   Sugerencia: Por absurdo si la integral anterior fuera nula demostrar que entonces sería
$$\int_R^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx = 0.$$

2. Sea D el disco abierto con centro en el origen y radio 1. Sea Ω un conjunto abierto y conexo que contiene al disco cerrado $\overline{D}$.

   Se da una función $f \in H(\Omega)$ tal que

   $$f(0) = 1, \quad 2 \leq |f(z)| \leq 3 \ \ \forall\, z \in \partial D$$

   a) Probar que existe algún cero de f en D.

   Sea $\alpha \in D$ un cero de f. Se define

   $$g(z) = \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha}\, f(z) \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$$

   b) Probar que g admite una extensión analítica a Ω.

   c) Probar que $2 \leq |g(z)| \leq 3 \quad \forall\, z \in \partial D$. Sugerencia: Probar que

   $$\left| \overline{z}\, \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = 1 \text{ si } |z| = 1.$$

   d) Probar que todos los ceros α de f cumplen $|\alpha| \geq 1/3$.
   Sugerencia: Calcular $g(0)$, usar la parte c) y aplicar el principio del módulo máximo a g.

   e) Probar que si algún cero α de f cumple $|\alpha| = 1/3$ entonces existe una constante k tal que

   $$f(z) = k \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \ \ \forall\, z \in \Omega, \ \ z \neq 1/\overline{\alpha}.$$

   Sugerencia: Probar que $|g(0)| = 3$.

3. Sea la ecuación diferencial lineal con condiciones iniciales siguiente:

   $$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 9, \qquad x(0) = 2, \ \ \dot{x}(0) = 1.$$

   a) Encontrar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función solución $x(t)$ para $t \geq 0$.

   b) Encontrar la función solución $x(t)$ para $t \geq 0$.
   Sugerencia: Usar sin demostrar la siguiente identidad de descomposición en fracciones simples:

   $$\frac{Ap^2 + Bp + 9}{p(p+3)^2} = \frac{B - 3A - 3}{(p+3)^2} + \frac{A - 1}{p + 3} + \frac{1}{p}.$$

   c) Para la función $x(t)$ hallada en la parte anterior, probar que la integral impropia que define su transformada de Laplace $X(p)$ es convergente si $\mathcal{R}e(p) > 0$.
   Sugerencia: Usar, sin demostrarlo pero <u>enunciándolo completamente</u>, el siguiente resultado:
   Cuál es la transformada de Laplace y cuál es su semiplano de convergencia, para las funciones:
   $Ae^{\alpha t}, \ \ t \geq 0$
   $At^k e^{\alpha t}, \ \ t \geq 0$ donde $k \geq 1$ es natural.