Soluciones del Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja.

Martes 3 de julio de 2007.

Ejercicio 1. Sea

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}.$$

Parte a) Encontrar los residuos de f en cada uno de sus polos.

Solución: Los polos son las raíces del denominador: $2i, -2i, 3i, -3i$. Son simples porque el denominador se factoriza como $(z-3i)(z+3i)(z-2i)(z+2i)$. Cuando se tiene un polo simple z_0 de una función $f(z)$, vale la fórmula siguiente para calcular el residuo: $Res_f(z_0) = 1\,/\,((1/f)'(z_0))$. En nuestro caso:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z^2+9)(z^2+4)}{z^2+2}$$

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \frac{2z(2z^2+13)}{z^2+2} - 2z\frac{(z^2+9)(z^2+4)}{(z^2+2)^2}$$

Sustituyendo en $z=3i$ queda $(1/f)'(3i) = (30/7)i$, luego $Res_f(3i) = -(7/30)i$. Sustituyendo en $z=-3i$ queda $(1/f)'(-3i) = -(30/7)i$, luego $Res_f(-3i) = (7/30)i$. Sustituyendo en $z=2i$ queda $(1/f)'(2i) = -10i$, luego $Res_f(2i) = (1/10)i$. Sustituyendo en $z=-2i$ queda $(1/f)'(-2i) = 10i$, luego $Res_f(-2i) = -(1/10)i$.

Parte b) Sea S_R la semicircunferencia de radio $R>0$ parametrizada por $S_R: z = Re^{it},\ 0 \le t \le \pi$. Enunciar y aplicar el lema de deformación de curvas para calcular

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Solución: Lema de deformación de curvas: Si $S_R: z = Re^{it},\ \theta_1 \le t \le \theta_2$. Si f es continua para todo z tal que $|z| \ge k$. Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = L \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = Li(\theta_2 - \theta_1) \qquad (1)$$

Aplicándolo al caso $\theta_1 = 0,;\ \theta_2 = \pi,\ f(z) = z^2 + 2/((z^2+9)(z^2+4))$, resulta

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(z^2+2)}{(z^2+9)(z^2+4)} = 0 = L$$

Usando la fórmula (1), con $L=0$ queda $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$.

Parte c) Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx.$$

Solución:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int_{[-R,+R]} f(z)\, dz \qquad (2)$$

Sea $\gamma = [-R, R] + S_R$, orientada en sentido antihorario. Por el teorema de los residuos, tenemos:

$$\int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{S_R} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left(Res_f(2i)\, Ind_\gamma(2i) + Res_f(3i)\, Ind_\gamma(2i) \right) =$$

$$= 2\pi i (\frac{-7i}{30} + \frac{i}{10} = \frac{4}{15}\, \pi.$$

$$\int_{[-R,R]} f(z)\, dz = -\int_{S_R} f(z)\, dz + \frac{4}{15}\, \pi$$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\, dz = -\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz + \frac{4}{15}\, \pi.$$

Usando la parte b), y la fórmula (2), resulta

$$I = \frac{2}{15}\, \pi.$$

Parte d) Probar que $\int_{S_R} f(z)\, dz \neq 0$ para todo $R > 3$.
Sugerencia: Por absurdo si la integral anterior fuera nula demostrar que entonces sería

$$\int_R^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx = 0.$$

Solución: Por absurdo, si $\int_{S_R} f(z)\, dz = 0$, integrando como en la parte c) a lo largo de la curva cerrada γ, resulta:

$$\int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{S_R} f(z)\, dz = \frac{4}{15}\, \pi.$$

$$\int_{[-R,R]} f(z)\, dz + 0 = \frac{4}{15}\, \pi.$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx = 2 \int_0^R \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx = \frac{4}{15}\, \pi.$$

Por lo tanto, usando la parte c) queda:

$$\int_0^R \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx = \frac{2}{15}\, \pi = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx$$

En la igualdad anterior pasamos el primer término restando al último miembro:

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx - \int_0^{+R} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx = \int_R^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx$$

Lo anterior es absurdo porque la integral de una función continua positiva es estrictamente positiva, no puede dar cero.

Ejercicio 2. Sea D el disco abierto con centro en el origen y radio 1. Sea Ω un conjunto abierto y conexo que contiene al disco cerrado $\overline{D}$.

Se da una función $f \in H(\Omega)$ tal que

$$f(0) = 1, \quad 2 \leq |f(z)| \leq 3 \ \ \forall\, z \in \partial D$$

Solución:

Parte a) Probar que existe algún cero de f en D.

Solución: Por absurdo, si f no se anula en D, entonces, como en ∂D tampoco se anula porque su módulo es ≥ 2, f no se anula en $\overline{D}$, y por continuidad tampoco se anula en un entorno $V \supset \overline{D}$. Entonces $1/f \in H(V)$. En el borde de D la función analítica $1/f$ tiene módulo $|1/f| = |1|/|f| \leq 1/2$ (porque en ∂D se cumple $|f| \geq 2$ por hipótesis). Aplicando el principio del módulo máximo a $1/f$ resulta $|1/f(z)| \leq 1/2 \ \ \forall z \in D$ lo cual es absurdo porque en $z = 0$ vale $|1/f(0)| = 1/1 = 1 > 1/2$.

Parte b) Sea $\alpha \in D$ un cero de f. Se define

$$g(z) = \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha}\, f(z) \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$$

Probar que g admite una extensión analítica a Ω.

Solución: La única singularidad que tiene g en Ω es α porque es el cociente de funciones analíticas y el denominador se anula solo en α. Por Cauchy- Goursat, si probamos que $\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)g(z) = 0$ entonces g, entonces g admite una extensión analítica a Ω, como queremos demostrar.

En efecto, como $f(\alpha) = 0$ se tiene:

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)g(z) = \lim_{z\to\alpha}(1 - \overline{\alpha} z)\, f(z) = (1 - |\alpha|^2)\, f(\alpha) = 0.$$

Parte c) Probar que $2 \leq |g(z)| \leq 3 \quad \forall\, z \in \partial D$. Sugerencia: Probar que

$$\left| \overline{z}\, \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = 1 \text{ si } |z| = 1.$$

Solución: Si $|z| = 1$ se tiene:

$$\left| \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = \left| \overline{z}\, \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = \left| \frac{\overline{z} - \overline{\alpha}|z|^2}{z - \alpha} \right| = \left| \frac{\overline{z - \alpha}}{z - \alpha} \right| = 1$$

(pues cualquier complejo tiene igual módulo que su conjugado.) Entonces, en la igualdad que define la función $g(z)$ tomando módulo, para $|z| = 1$ se cumple:

$$|g(z)| = \left| \frac{1 - \overline{\alpha} z}{z - \alpha} \right| \, |f(z)| = |f(z)|$$

Hemos probado que $|g(z)| = |f(z)|$ si $|z| = 1$. Usando la hipótesis $2 \leq |f(z)| \leq 3$ si $|z| = 1$, queda:

$$2 \leq |g(z)| \leq 3 \ \ \forall\, z \in \partial D.$$

Parte d) Probar que todos los ceros α de f cumplen $|\alpha| \geq 1/3$.

Sugerencia: Calcular $g(0)$, usar la parte c) y aplicar el principio del módulo máximo a g.

Solución: Calculando $g(0)$ en la igualdad que define la función g resulta:

$$|g(0)| = \frac{|f(0)|}{|\alpha|} = 1/|\alpha|$$

Sabemos que la función $g \in H(\Omega)$ tiene en el borde del disco D, módulo ≤ 3. Entonces, por el principio del módulo máximo tiene módulo ≤ 3 en todos los puntos interiores a D, en particular en $z = 0$. Así $|g(0)| \leq 3$, de donde $1/|\alpha| \leq 3$, y por lo tanto $|\alpha| \geq 1/3$.

Parte e) Probar que si algún cero α de f cumple $|\alpha| = 1/3$ entonces existe una constante k tal que

$$f(z) = k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad \forall\, z \in \Omega, \quad z \neq 1/\overline{\alpha}.$$

Sugerencia: Probar que $|g(0)| = 3$.

Solución:

$$|g(0)| = \frac{|f(0)|}{|\alpha|} = 1/|\alpha|,$$

de donde si $|\alpha| = 1/3$ se deduce $|g(0)| = 3$. Pero en el borde de D donde $|g|$ alcanza su máximo, es ≤ 3, según lo demostrado en la parte c). Entonces el máximo de $|g|$ es 3 y se alcanza también en el punto 0 interior a D. Hemos probado que en 0 hay un máximo relativo. Por el principio del módulo máximo g es constante igual a k complejo para todo $z \in \Omega$.

$$k = g(z) = \frac{1-\overline{\alpha}z}{z-\alpha}\, f(z) \quad \forall\, z \in \Omega$$

Despejando $f(z)$ de la igualdad anterior, resulta:

$$f(z) = k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad \forall\, z \in \Omega, \quad z \neq 1/\overline{\alpha}.$$

Ejercicio 3.

Sea la ecuación diferencial lineal con condiciones iniciales siguiente:

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 9, \qquad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Parte a) Encontrar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función solución $x(t)$ para $t \geq 0$.

Solución: Llamando $X(p)$ a la transformada de Laplace de $x(t)$, usaremos la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = pX(p) - x(0), \quad \mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0).$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial dada, resulta:

$$p^2X(p) - 2p - 1 + 6pX(p) - 12 + 9X(p) = \frac{9}{p} \qquad (1)$$

En el último miembro de la igualdad (1) hemos usado que la transformada de Laplace de la función constante k (para $t \geq 0$; nula para $t = 0$; el escalón de altura k) es k/p.

Despejando $X(p)$ de la ecuación algebraica (1), resulta:

$$X(p) = \frac{2p^2 + 13p + 9}{p(p+3)^2}.$$

Parte b) Encontrar la función solución $x(t)$ para $t \geq 0$.
Sugerencia: Usar sin demostrar la siguiente identidad de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{Ap^2 + Bp + 9}{p(p+3)^2} = \frac{B - 3A - 3}{(p+3)^2} + \frac{A-1}{p+3} + \frac{1}{p}.$$

Solución: Usando la transformada de Laplace encontrada en la parte a), y aplicando la sugerencia con $A = 2, \quad B = 13$, resulta:

$$X(p) = \frac{4}{(p+3)^2} + \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p}.$$

Usaremos el siguiente resultado (las funciones en t están dadas para $t \geq 0$ pues pata $t < 0$ son nulas):

(*) La transformada de Laplace de $e^{\alpha t}$ es $1/(p - \alpha)$, convergente para $Re(p) > Re(\alpha)$; la transformada de Laplace de t es $1/p^2$, convergente para $Re(p) > 0$; y la transformada de Laplace de $te^{\alpha t}$ es $1/(p - \alpha)^2$, convergente si $Re(p) > Re(\alpha)$.

Aplicando lo anterior en el caso particular de $\alpha = -3$ y de $\alpha = 0$, resulta:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{(p+3)^2} + \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p}\right) = 4te^{-3t} + e^{-3t} + 1, \quad t \geq 0.$$

Parte c) Para la función $x(t)$ hallada en la parte anterior, probar que la integral impropia que define su transformada de Laplace $X(p)$ es convergente si $\mathcal{R}e(p) > 0$.
Sugerencia: Usar, sin demostrarlo pero enunciándolo completamente, el siguiente resultado:
Cuál es la transformada de Laplace y cuál es su semiplano de convergencia, para las funciones:
$Ae^{\alpha t}, \ \ t \geq 0$
$At^k e^{\alpha t}, \ \ t \geq 0$ donde $k \geq 1$ es natural.

Solución: En el párrafo (*) de la parte b) enunciamos cuáles son estas transformadas de Laplace y sus semiplanos de convergencia. La transformada $X(p)$ de la función $x(t)$ es la suma de tres de estas transformadas: dos de ellas para $\alpha = -3$ y una de ellas para $\alpha = 0$. Las dos primeras convergen para $Re(p) > -3$ y la última para $Re(p) > 0$. Si las tres integrales impropias convergen, es suficiente para que converja la integral impropia de la suma. Entonces, en la intersección de los tres semiplanos $Re(p) > -3, \ Re(p) > -3, \ Re(p) > 0$, converge la integral impropia transformada de Laplace de $x(t)$. Esa intersección es $Re(p) > 0$.