Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja.

3 de julio de 2006.

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Núm. parcial

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	1^+	2a	2b	2c	2d	2^+	3a	3b	3c	3d	3e	3^+	Total

- El parcial consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 13 partes en total; cada parte vale 5 puntos, sumando un total de 65 puntos. No hay puntajes negativos.
- Además se podrá premiar cada ejercicio resuelto con hasta 5 puntos adicionales, por ejemplo si la claridad, completitud y justificación en el desarrollo de las ideas fueran sobresalientes.
- La duración del parcial es de 4 horas. Durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.
- El mínimo para aprobar el curso es de 25 puntos y el mínimo para exonerar del examen es de 60 puntos; ambos mínimos son en la suma de los dos parciales.

1. Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+3i)}$$

a) Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $D^*_R(i) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < R\}$; y hallar el máximo $R > 0$ para el cual dicha serie es convergente para todo $z \in D^*_R(i)$.

b) Calcular los residuos $Res_f(i)$ y $Res_f(-3i)$. Calcular la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$, siendo γ el camino cerrado $\gamma = [-r, r] + S_r$, donde r es real, $r > 1$, y S_r es la semicircunferencia $z(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

c) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)\,dx$$

d) Deducir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

(Sugerencia: Hallar la parte imaginaria de $f(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}$ y usar la parte c.)

2. Sea la siguiente función compleja de variable real t:

$$f(t) = (1-i)\, e^{\left(1 - e^{-t}\right)} \qquad \forall t \geq 0$$

y sea $F(p)$ su transformada de Laplace.

a) Probar que $F(p)$ converge en el semiplano $\{Re(p) > 0\}$.

b) Probar que para todo p complejo en el semiplano $\{Re(p) > 0\}$ se cumple

$$F(p+1) = pF(p) - 1 + i$$

(Sugerencia: Probar que para todo $t > 0$ se cumple $f'(t) = e^{-t} f(t)$.)

c) Probar que $F(p)$ tiene una extensión analítica $G(p)$ al abierto

$$\{Re(p) > -1\} \setminus \{0\}$$

Sugerencia: Usar la parte b) para definir $G(p)$ cuando $Re(p) > -1, \quad p \neq 0$, conociendo $F(p+1)$.

d) Probar que $G(p)$ tiene en $p = 0$ un polo de multiplicidad 1.
(Sugerencia: Probar que $\lim_{p \to 0} p\, G(p) = F(1) + 1 - i \neq 0$.)

3. Sea $D_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Sea Ω una región abierta tal que $\overline{D_2(0)} \subset \Omega$. Sea $f \in H(\Omega)$ no constante y tal que

$$|f(z)| = 3 \quad \forall\, z \text{ tal que } |z| = 2.$$

a) Probar que f tiene al menos un cero $\alpha \in D_2(0)$.
(Sugerencia: Usar el principio del módulo máximo para acotar superiormente $|f|$ y $|1/f|$ en $\overline{D_2(0)}$.)

b) Sea $\alpha \in D_2(0)$ un cero de f. Se define la función

$$h(z) = \frac{f(z)(4 - \overline{\alpha} z)}{2(z - \alpha)} \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$$

Probar que

$$|h(z)| = 3 \quad \forall\, z \text{ tal que } |z| = 2.$$

(Sugerencia: Considerar $|h(z)/\overline{z}|$ para $|z| = 2$.)

c) Probar que la función h de la parte b) tiene una singularidad evitable en $z = \alpha$, y que si α es un cero simple de f entonces no es un cero de la extensión analítica de h.

d) Si además se sabe que la función f es inyectiva, probar que la función h de la parte b) es constante para todo $z \in \Omega$.
(Sugerencia: Usar la parte c); probar que h no se anula en $D_2(0)$; usar las partes a) y b).)

e) Encontrar todas las funciones f enteras e inyectivas tales que $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$.