Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja. Soluciones.

3 de julio de 2006.

Ejercicio 1. Sea
$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2(z+3i)}$$

Parte a): Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $D^*_R(i)=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-i|<R\}$; y hallar el máximo $R>0$ para el cual dicha serie es convergente para todo $z\in D^*_R(i)$.

Solución: $z=i$ es un polo de orden 2 de $f(z)$ (porque es un cero de multiplicidad 2 del denominador). Entonces la serie de Laurent centrada en $z=i$ es de la forma:

$$f(z)=\sum_{m=-2}^{+\infty}a_m(z-i)^m \quad \forall z\in D^*_R(i) \qquad (1)$$

Hay que determinar los coeficientes a_m para todo m entero $m\geq -2$.

Por un lado la igualdad (1), donde la serie de Laurent de f converge a $f(z)$, se verifica para $R>0$ tal que f es analítica en $D^*_R(i)$. El máximo valor $R>0$ que cumple lo anterior es $R=\operatorname{dist}(i,-3i)=|i-(-3i)|=|4i|=4$, ya que f es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{i,-3i\}$. Concluimos que el máximo $R>0$ para el cual la serie de Laurent de f en la corona $D^*_R(i)$ es convergente, es $R=4$.

Ahora hallemos esa serie de Laurent para $z\in D^*_4(i)$; es decir para z tal que $0<|z-i|<4$.

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{z-i+4i}=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1/(4i)}{1+(z-i)/(4i)} \qquad (2)$$

Llamando $u=(z-i)/(4i)$ como $|z-i|<4$ se cumple $|u|<1$. Recordando que la suma de una serie geométrica de razón $-u$ es $1/(1+u)$ cuando $|u|<1$ se obtiene:

$$\frac{1}{1+(z-i)/(4i)}=\frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-u)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{4^n i^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^n(z-i)^n}{4^n} \qquad (3)$$

En la última igualdad de (3) se usó que $-1=i\cdot i$; luego $i=(-1)/i$.

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene:

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^n(z-i)^n}{4^n}=-i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^n(z-i)^{n-2}}{4^{n+1}} \qquad (4)$$

Tomando como índice $m=n-2$; es decir $n=m+2$ con $m\geq -2$ entero (para que $n\geq 0$), resulta de (4):

$$f(z)=-i\sum_{m=-2}^{+\infty}\frac{(i)^{m+2}(z-i)^m}{4^{m+3}}=\sum_{m=-2}^{+\infty}\frac{(-1)\,i\,(i)^m i^2}{4^{m+3}}\cdot(z-i)^m=\sum_{m=-2}^{+\infty}\frac{(i)^{m+1}}{4^{m+3}}\cdot(z-i)^m$$

Entonces, los coeficientes del desarrollo de Laurent de f centrado en el polo $z = i$ son:

$$a_m = 0 \text{ si } m < -2, \quad a_m = \frac{i^{m+1}}{4^{m+3}} \text{ si } m \geq -2. \quad \square$$

Parte b): Calcular los residuos $Res_f(i)$ y $Res_f(-3i)$. Calcular la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$, siendo γ el camino cerrado $\gamma = [-r, r] + S_r$, donde r es real, $r > 1$, y S_r es la semicircunferencia $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Solución: $Res_f(i) = a_{-1}$ donde a_{-1} es el coeficiente a_m calculado en la parte anterior para $m = -1$.

$$Res_f(i) = \frac{i^{-1+1}}{4^{-1+3}} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Para calcular el Residuo de f en $-3i$ observemos que $-3i$ es un polo simple de f (porque es un cero de multiplicidad 1 del denominador de f). Recordemos la fórmula de derivadas para calcular residuos: si a es un polo de orden k entonces

$$Res_f(a) = \frac{[(z-a)^k f(z)]^{(k-1)}\,|_{z=a}}{(k-1)!}$$

En nuestro caso $k = 1$ y $a = -3i$

$$Res_f(-3i) = (z+3i)f(z)\,|_{z=-3i} = \left.\frac{1}{(z-i)^2}\right|_{z=-3i} = \frac{1}{(-3i-i)^2} = \frac{1}{(-4i)^2} = \frac{1}{16i^2} = \frac{-1}{16}$$

Concluimos que

$$Res_f(i) = \frac{1}{16}, \quad Res_f(-3i) = \frac{-1}{16}. \quad (*)$$

Ahora calculemos $\int_\gamma f(z)\,dz$.

El camino γ es el segmento $[-r, r]$ del eje real, recorrido de izquierda a derecha, más el arco de circunferencia S_r con centro en el origen que va de r hasta $-r$ en el semiplano $Im(z) > 0$. Como el radio $r > 1$, la curva γ encierra al polo $z = i$, dando una vuelta en sentido antihorario al alrededor de él. Entonces $Ind_\gamma(i) = 1$.

El otro polo de f es $z = -3i$ que está en el semiplano $Im(z) < 0$, luego está en el exterior de la curva γ. Entonces la curva γ no da ninguna vuelta alrededor de $z = -3i$ e $Ind_\gamma(-3i) = 0$.

Aplicando el teorema de los residuos y el resultado (*) resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = Res_f(i) Ind_\gamma(i) + Res_f(-3i) Ind_\gamma(-3i) = \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{-1}{16}\cdot 0 = \frac{1}{16}$$

Multiplicando por $2\pi i$ se concluye:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{16} = \frac{\pi i}{8}. \quad \square$$

Parte c): Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)\,dx$$

Solución: Por el resultado obtenido en la parte anterior:

$$\frac{\pi i}{8} = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{[-r,r]} f(z)\, dz + \int_{S_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{+r} f(x)\, dx + \int_{S_r} f(z)\, dz$$

Tomando límite cuando $r \to +\infty$ en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{\pi i}{8} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx + \lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} f(z)\, dz \qquad (5)$$

Por el lema de deformación de curvas, como:

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{(z-i)^2(z+3i)} = 0$$

se obtiene:

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (5) se concluye:

$$\frac{\pi i}{8} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx. \quad \square$$

Parte d): Deducir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\, dx = \frac{\pi}{8}$$

(Sugerencia: Hallar la parte imaginaria de $f(x)$ cuando $x \in \mathbb{R}$ y usar la parte c.)

Solución: Si $x \in \mathbb{R}$ entonces:

$$Im(f(x)) = Im\left(\frac{1}{(x-i)^2(x+3i)}\right)$$

$$Im(f(x)) = Im\left(\frac{(x+i)^2(x-3i)}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\right) =$$

$$Im(f(x)) = \frac{Im((x^2-1+2xi)(x-3i))}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

$$Im(f(x)) = \frac{-3x^2+3+2x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)} = \frac{3-x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)}$$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x^2}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} Im(f(x))\, dx = \lim_{r\to+\infty} Im\left[\int_{-r}^{+r} f(x)\, dx\right] =$$

$$= Im\left[\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)\, dx\right] = Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right] = Im\left[\frac{\pi i}{8}\right] = \frac{\pi}{8}. \quad \square$$

Ejercicio 2. Sea la siguiente función compleja de variable real t:

$$f(t) = (1-i)\, e^{\,(1-e^{-t})} \qquad \forall t \geq 0$$

y sea $F(p)$ su transformada de Laplace.

Parte a): Probar que $F(p)$ converge en el semiplano $\{Re(p) > 0\}$.

Solución: Sea $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt$. Probemos que esa integral impropia es absolutamente convergente si $Re(p) > 0$. Es decir:

$$\text{A probar: } \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}|\, dt \text{ converge.} \qquad (1)$$

Como toda integral impropia absolutamente convergente es convergente, eso probará que $F(p)$ es convergente si $Re(p) > 0$ como queremos.

Para probar que la integral en (1) converge, aplicaremos el criterio de comparación de integrales impropias, acotando superiormente el integrando $|f(t)e^{-pt}| \leq g(t)$ con una función real $g(t)$ cuya integral impropia $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ sea convergente.

$$|f(t)e^{-pt}| = |(1-i)\, e^{\,(1-e^{-t})}|\, |e^{-pt}| = |1-i|\, e^{\,(1-e^{-t})}\, e^{-Re(p)t} \quad (2)$$

En la última igualdad de (2) hemos usado que $e^{\,(1-e^{-t})}$ es un real positivo (porque es una exponencial con exponente real: en efecto t es real y entonces el exponente $1-e^{-t}$ toma valores reales); y que el módulo de e^{-pt} es $e^{-Re(p)t}$.

Por un lado en (2) tenemos $|1-i| = \sqrt{2}$.

Además como $0 \leq t < +\infty$ se cumple $1 \geq e^{-t} > 0$; luego $0 \leq 1 - e^{-t} < 1$, de donde

$$e^0 \leq e^{\,(1-e^{-t})} < e^1 = e$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$|f(t)e^{-pt}| \leq \sqrt{2}\, e \cdot e^{-Re(p)t} = g(t)$$

Probemos ahora que $\int_0^{\infty} g(t)\, dt$ es convergente. Como $\sqrt{2}\, e$ es constante, alcanza probar que

$$\int_0^{\infty} e^{-Re(p)t}\, dt \quad (3)$$

es convergente cuando $Re(p) > 0$. En efecto:

$$\int_0^{\infty} e^{-Re(p)t}\, dt = \frac{-1}{Re(p)} e^{-Re(p)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-Re(p)t}}{Re(p)} = \frac{1}{Re(p)} \quad (4)$$

En la última igualdad de (4) hemos usado que $Re(p) > 0$ y por lo tanto $\lim_{t\to+\infty} e^{-Re(p)t} = 0$.

La igualdad (4) prueba que la integral (3) es convergente como queríamos demostrar. $\square$

Parte b): Probar que para todo p complejo en el semiplano $\{Re(p) > 0\}$ se cumple

$$F(p+1) = pF(p) - 1 + i$$

(Sugerencia: Probar que para todo $t > 0$ se cumple $f'(t) = e^{-t} f(t)$.)

Solución:

$$f'(t) = [e^{(1-e^{-t})}]' = (e^{(1-e^{-t})}) \cdot [1-e^{-t}]' = (e^{(1-e^{-t})}) \cdot (-(e^{-t})(-1)) = f(t) \cdot e^{-t} \quad (5)$$

Aplicaremos la transformada de Laplace a las funciones en ambos miembros de la identidad (5). Se obtiene:

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t))(p) = \mathcal{L}(e^{-t} f(t))(p) \quad (5^*)$$

para p en la intersección de los semiplanos de convergencia de las transformadas de Laplace de ambos miembros de la igualdad.

Recordemos la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada:

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t))(p) = pF(p) - f(0) \quad \text{si } Re(p) > 0 \quad (6)$$

Recordemos también la fórmula de la transformada de Laplace al multiplicar por $e^{\alpha t}$:

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(p) = F(p-\alpha) \quad \text{si } Re(p) > Re(\alpha)$$

En particular para $\alpha = -1$ resulta:

$$\mathcal{L}(e^{-t} f(t))(p) = F(p+1) \quad \text{si } Re(p) > -1 \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5*) resulta:

$$F(p+1) = pF(p) - f(0) \ \text{ si } Re(p) > 0 \quad (8)$$

En la igualdad (8) hemos usado que la intersección de los semiplanos $Re(p) > 0$ y $Re(p) > -1$ es $Re(p) > 0$.

Calculemos el número $f(0)$:

$$f(0) = (1-i) \ e^{(1-e^{-t})}\Big|_{t=0} = (1-i)\, e^{(1-e^{-0})} = (1-i)\, e^{(1-1)} = (1-i)\, e^0 = 1-i$$

Entonces, sustituyendo $f(0) = 1-i$ en (8) resulta:

$$F(p+1) = pF(p) - 1 + i \ \text{ si } Re(p) > 0. \quad \square$$

Parte c): Probar que $F(p)$ tiene una extensión analítica $G(p)$ al abierto

$$\{Re(p) > -1\} \setminus \{0\}$$

Sugerencia: Usar la parte b) para definir $G(p)$ cuando $Re(p) > -1$ y $p \neq 0$, conociendo $F(p+1)$.

Solución: Por el resultado de la parte b) se tiene:

$$F(p+1) = pF(p) - 1 + i \ \text{ si } Re(p) > 0$$

Por lo tanto, despejando $F(p)$ se deduce que:

$$F(p) = \frac{F(p+1) + 1 - i}{p} \text{ si } Re(p) > 0 \quad (9)$$

Observamos que $F(p+1)$ está definida y es analítica para todo p tal que $Re(p+1) > 0$, porque $F(q)$ está definida y es analítica (por ser una transformada de Laplace) para todo q tal que $Re(q) > 0$, como fue probado en la parte a). Luego $F(p+1)$ está definida y es analítica para todo p tal que $Re(p+1) = Re(p) + 1 > 0$, es decir $Re(p) > -1$.

La igualdad (9) vale solo para $Re(p) > 0$, pero de lo anterior concluimos que el segundo miembro de la igualdad (9) está definido y es función analítica para todo $p \neq 0$ (para que no se anule el denominador) tal que $Re(p) > -1$. Es decir:

$$\frac{F(p+1) + 1 - i}{p} \text{ es analítica si } Re(p) > -1, \;\; p \neq 0 \quad (10)$$

Entonces podemos definir la función $G(p)$ de la siguiente forma:

$$G(p) = \frac{F(p+1) + 1 - i}{p} \text{ si } Re(p) > -1, \quad p \neq 0 \quad (11)$$

Las igualdades (9) y (11) dicen que

$$G(p) = F(p) \text{ si } Re(p) > 0$$

Esto último significa que G es una extensión de F.

Además por (10) y (11) G es analítica en $\{Re(p) > -1\} \setminus \{0\}$.

Concluimos pues que G es una extensión analítica de F al abierto $\{Re(p) > -1\} \setminus \{0\}$ como queríamos demostrar. $\square$

Parte d): Probar que $G(p)$ tiene en $p = 0$ un polo de multiplicidad 1.

(Sugerencia: Probar que $\lim_{p\to 0} p\, G(p) = F(1) + 1 - i \neq 0$.)

Solución: Primero observemos que a es una singularidad aislada de G porque G es analítica en el abierto $\{Re(p) > -1\} \setminus \{0\}$ que incluye al entorno pinchado $D_1^*(0)$.

Tomemos límite cuando $p \to 0$ en la igualdad (11) de la parte c):

$$G(p) = \frac{F(p+1) + 1 - i}{p} \text{ si } Re(p) > -1, \quad p \neq 0 \quad (11)$$

$$\lim_{p\to 0} G(p) = \lim_{p\to 0} \frac{F(p+1) + 1 - i}{p} = \infty \quad (12)$$

Para deducir (12) observamos que el numerador $F(p+1)+1-i$ tiene límite igual a $F(1)+1-i \in \mathbb{C}$ cuando $p \to 0$ porque $F(q)$ es analítica, y por lo tanto continua, en el semiplano $Re(q) > 0$ que incluye al punto $q = p + 1 = 1$.

Es decir:

$$\lim_{p\to 0} F(p+1) + 1 - i = F(1) + 1 - i = \in \mathbb{C} \quad (13)$$

Para terminar de probar (12) falta demostrar que $F(1)+1-i \neq 0$, es decir que $F(1) \neq -1+i$. Por absurdo, si fuera $F(1) = -1+i$, como $F(1)$ es la transformada de Laplace $F(p)$, cuando $p = 1$, de la función $f(t) = (1-i)\, e^{\,(1-e^{-t})}$, se tendría:

$$F(1) = \int_0^{+\infty} (1-i)\, e^{\,(1-e^{-t})} e^{-t}\, dt = -1+i$$

Dividiendo entre $1-i$:

$$\int_0^{+\infty} e^{\,(1-e^{-t})} e^{-t}\, dt = -1$$

Esta última igualdad es una contradicción, porque la integral de la izquierda es positiva (al ser la integral de una función real positiva) y el número -1 a la derecha es negativo. Esto termina de probar la igualdad (12).

De (12), por definición de polo (singularidad aislada tal que $\lim_{p\to 0} G(p) = \infty$), se deduce que el punto $p = 0$ es un polo de G.

Ahora probemos que su multiplicidad es 1.

La multiplicidad k de un polo a de una función $G(p)$ es el natural $k \geq 1$ tal que

$$\lim_{p\to a} (p-a)^k G(p) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

En nuestro caso, con $a = 0$ y $k = 1$, usando (11) y (13) se obtiene:

$$\lim_{p\to 0} pG(p) = \lim_{p\to 0} F(p+1) + 1 - i = F(1) + 1 - i = \lambda \in \mathbb{C}$$

Ya probamos que $\lambda = F(1) + 1 - i \neq 0$. Luego $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 3. Sea $D_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Sea Ω una región abierta tal que $\overline{D_2(0)} \subset \Omega$. Sea $f \in H(\Omega)$ no constante y tal que

$$|f(z)| = 3 \quad \forall\, z \text{ tal que } |z| = 2.$$

Parte a): Probar que f tiene al menos un cero $\alpha \in D_2(0)$.

Sugerencia: Usar el principio del módulo máximo para acotar superiormente $|f|$ y $|1/f|$ en $\overline{D_2(0)}$.

Solución: f es analítica en la región $\Omega \subset D_2(0)$ y no es constante. Entonces, por el principio del módulo máximo:

$$\max_{z \in \overline{D_2(0)}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D_2(0)} |f(z)| = 3 \quad (1)$$

Por absurdo, si $f(z)$ no tuviera algún cero en $D_2(0)$, como tampoco tiene ceros en $\partial D_2(0)$ (porque $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$) entonces $1/f(z)$ sería analítica en un abierto que contiene a $\overline{D_2(0)}$. Podríamos entonces aplicar el principio del módulo máximo a $1/f(z)$, obteniendo:

$$\max_{z \in \overline{D_2(0)}} \frac{1}{|f(z)|} = \max_{z \in \partial D_2(0)} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

De (2) se deduce

$$z \in \overline{D_2(0)} \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow |f(z)| \geq 3 \;\forall\, z \in \overline{D_2(0)} \quad (3)$$

Pero de (1) se deduce

$$|f(z)| \leq 3 \;\forall\, z \in \overline{D_2(0)} \quad (4)$$

Entonces, de (3) y (4) se obtiene:

$$|f(z)| = 3 \;\forall\, z \in \overline{D_2(0)}$$

Esto implica que $|f(z)|$ tiene un máximo local en todo $z \in D_2(0)$. Por el principio del módulo máximo $f(z)$ es constante en la región Ω, lo cual contradice la hipótesis de que f no es constante. $\square$

Parte b): Sea $\alpha \in D_2(0)$ un cero de f. Se define la función

$$h(z) = \frac{f(z)(4 - \overline{\alpha} z)}{2(z - \alpha)} \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$$

Probar que $|h(z)| = 3 \quad \forall\, z$ tal que $|z| = 2$.

(Sugerencia: Considerar $|h(z)/\overline{z}|$ para $|z| = 2$.)

Solución:

$$\frac{h(z)}{\overline{z}} = \frac{f(z)(4 - \overline{\alpha} z)}{2\overline{z}(z - \alpha)} = \frac{f(z)}{2} \cdot \frac{4 - \overline{\alpha} z}{\overline{z} z - \alpha \overline{z}} \quad (5)$$

Pero si $|z| = 2$ entonces $\overline{z} z = |z|^2 = 4$. Sustituyendo en (5) se deduce:

$$\frac{h(z)}{\overline{z}} = \frac{f(z)}{2} \cdot \frac{4 - \overline{\alpha} z}{4 - \alpha \overline{z}} \quad \text{si } |z| = 2$$

Luego:

$$\frac{|h(z)|}{|\overline{z}|} = \frac{|f(z)|}{2} \cdot \frac{|4-\overline{\alpha}z|}{|4-\alpha\overline{z}|} \quad \text{si } |z| = 2 \quad (6)$$

Sabiendo que $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$ y además que $4 - \overline{\alpha}z$ es el conjugado de $4 - \alpha\overline{z}$ (y por lo tanto tienen el mismo módulo), se obtiene de (6) la siguiente igualdad:

$$\frac{|h(z)|}{|\overline{z}|} = \frac{3}{2} \quad \text{si } |z| = 2$$

Como $|\overline{z}| = |z| = 2$ se deduce

$$|h(z)| = 3 \quad \text{si } |z| = 2 \quad \square$$

Parte c): Probar que la función h de la parte b) tiene una singularidad evitable en $z = \alpha$, y que si α es un cero simple de f entonces no es un cero de la extensión analítica de h.

Solución: Siendo 1 la multiplicidad del cero α de f, se cumple:

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{z-\alpha} = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

De donde:

$$\lim_{z\to\alpha} h(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{z-\alpha} \cdot \frac{4-\overline{\alpha}z}{2} = \lambda\frac{4-\overline{\alpha}\alpha}{2} = \lambda\frac{4-|\alpha|^2}{2} = \mu \in \mathbb{C} \quad (7)$$

Entonces α es una singularidad evitable de $h(z)$, y por lo tanto existe una extensión analítica (que seguimos llamando $h(z)$) a $z = \alpha$.

Tenemos entonces $h \in H(\Omega)$. Además como $\lambda \neq 0$ y $|\alpha| < 2$ (porque $\alpha \in D_2(0)$), de (7) se deduce que $h(\alpha) = \mu \neq 0$. Entonces α no es cero de h. $\square$

Parte d): Si además se sabe que la función f es inyectiva, probar que la función h de la parte b) es constante para todo $z \in \Omega$. (Sugerencia: Usar la parte c). Probar que h no se anula en $D_2(0)$, usar las partes a) y b).)

Solución: Por la parte a) sabemos que $f(z)$ tiene algún cero $\alpha \in D_2(0)$. Como f es inyectiva entonces α es el único cero de f y es simple (porque $f'(\alpha) \neq 0$ ya que toda función analítica en Ω inyectiva, cumple $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$).

Aplicando la parte c) tenemos la función h, analítica en Ω y tal que α no es cero de h.

Los ceros de

$$h(z) = \frac{f(z)}{2} \cdot \frac{4-\overline{\alpha}z}{z-\alpha}$$

son, o bien los ceros de f, o bien los ceros de $4 - \overline{\alpha}z$.

Los ceros de f son uno solo: $z = \alpha$ porque f es inyectiva; pero por la parte c) α no es cero de h.

Los ceros de $4 - \overline{\alpha}z$ son solo $z = 4/\overline{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$. Pero $|4/\overline{\alpha}| = 4/|\alpha| > 4/2 = 2$ (porque $|\alpha| < 2$). Entonces $4/\overline{\alpha} \notin D_2(0)$ y concluimos que

$$h(z) \text{ no tiene ningún cero en } D_2(0) \quad (8)$$

Queremos demostrar que h es constante en Ω. Por absurdo, si h no fuera constante en Ω entonces, como $|h(z)| = 3$ si $|z| = 2$ (por la parte b), se puede aplicar el resultado de la parte a) a la función $h(z)$ en vez de $f(z)$. Se deduciría que

$$h \text{ tiene al menos un cero } \beta \in D_2(0) \quad (9)$$

La afirmación (9) contradice a (8), con lo que llegamos a un absurdo. $\square$

Parte e): Encontrar todas las funciones f enteras e inyectivas tales que $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$.

Solución: Por la parte d) la función

$$h(z) = \frac{f(z)(z - \overline{\alpha} z)}{2(z - \alpha)} = k \text{ constante} \quad \forall\, z \in \Omega = \mathbb{C}$$

Luego, despejando $f(z)$ resulta:

$$f(z) = \frac{2k(z - \alpha)}{4 - \overline{\alpha} z} \quad (10)$$

Pero f es entera: luego no tiene polos; entonces $\overline{\alpha} = 0$, de donde se deduce que $\alpha = 0$. Sustituyendo en (10) se obtiene:

$$f(z) = \frac{k}{2}\, z = cz$$

donde c es una constante. Como $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$ se concluye que la contante c verifica:

$$3 = |c|\, 2 \Rightarrow |c| = \frac{3}{2}$$

En definitiva, todas las funciones enteras e inyectivas tales que $|f(z)| = 3$ si $|z| = 2$, son de la forma $f(z) = cz$ donde c es una constante con módulo $3/2$. $\square$