SOLUCIÓN PRIMER PARCIAL (27 DE ABRIL DE 2018)

Ejercicio 1.
Si consideramos $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, haciendo cuentas llegamos a que

$$\phi(z) = \frac{(1+i)z - 4i}{z - (1+i)}$$

1. Como $\phi(1+i) = \infty$, se tiene que si $\mathcal{C}$ es una circunferencia con $1+i \in \mathcal{C}$ se cumple que $\phi(\mathcal{C})$ es una recta. Y si $1+i \notin \mathcal{C}$ se cumple que $\phi(\mathcal{C})$ es una circunferencia.

2. Como los puntos $2, 1+i, 1-i \in \mathcal{C}$ se tiene que $\phi(2), \phi(1+i), \phi(1-i) \in \phi(\mathcal{C})$. Como los puntos $\phi(2), \phi(1+i), \phi(1-i)$ pertenecen a la recta $x = 2$, entonces $\phi(\mathcal{C})$ es la recta $x = 2$.

3. Sea $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3/2| = 1/2\}$. Como $1+i \notin \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(\mathcal{C}_1)$ es una circunferencia. Como $\mathcal{C}_1$ es tangente a $\mathcal{C}$ se tiene que $\phi(\mathcal{C}_1)$ es tangente a $\phi(\mathcal{C})$. Y como $2 \in \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(2) = 2 \in \phi(\mathcal{C}_1)$. Por lo tanto $\phi(\mathcal{C}_1)$ tiene que ser una circunferencia de centro $a \in \mathbb{R}$, con $a > 2$ y que pasa por el punto 2. Por lo tanto $\phi(\mathcal{C}_1) = \{z \in \mathbb{C} : \ \ |z - a| = (a-2)\}$. Como $1 \in \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(1) = i + 3 \in \phi(\mathcal{C}_1)$. Haciendo cuentas se llega a que $a = 3$.

4. No es posible ya que $\phi(\{z \in \mathbb{C} : \ \ |z-1| \leq 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \geq 2\}$.

Ejercicio 2.

1. Si $z = 0$ entonces por L'Hopital se cumple que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{sen(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{cos(z)} = 1$. Por lo tanto es una singularidad evitable.
Si $z = k\pi$ con $k \neq 0$. Se tiene que $\lim_{z \to k\pi} \frac{z}{sen(z)} = \infty$. Por lo tanto es un polo.

2. Primero observemos que

$$\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)} = \int_\gamma \frac{\frac{w}{sen(w)}}{w} dw$$

Definimos la función $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ con $1 < r < \pi$ y tal que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{w}{sen(w)} & si \quad z \neq 0, \\ 1 & si \quad z = 0. \end{cases}$$

Por la parte 1, se tiene que $f \in H(D(0,r))$. Por lo tanto, por la Fórmula de Cauchy se tiene que

$$1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{w}{sen(w)}}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{sen(w)}.$$

Por lo tanto $\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)} = 2\pi i$.

Ejercicio 3. Partes 1 y 2, ver teórico.

3. El punto $\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \in D(0,1)$. Por lo tanto $Ind_\gamma(0) = Ind_\gamma(\frac{1}{2} + \frac{i}{4})$. Haciendo el cálculo se llega a que

$$Ind_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{5ie^{5it} dt}{e^{5it}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} 5i dt = 10$$

Por lo tanto $Ind_{\gamma}(\frac{1}{2}+\frac{i}{4})=10$.

Ejercicio 4 . Ver teórico .