Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Funciones de variable compleja.

PRIMER PARCIAL - 27 DE ABRIL DE 2018. DURACIÓN: 3:30

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej4	**Total**

Ejercicio 1. (12 puntos)

Sea $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius tal que $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$ y $\phi(1+i) = \infty$.

1. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ una circunferencia. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\phi(\mathcal{C})$ sea una recta.(3 puntos)
2. Sea $\mathcal{C} := (\partial B(1,1))$= borde de la bola de centro 1 y radio 1. Halle $\phi(\mathcal{C})$.(3 puntos)
3. Hallar $\phi(\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3/2| = 1/2\})$.(3 puntos)
4. ¿Existe $z \in B(1,1)$ tal que $|\phi(z)| = 1$? Justifique.(3 puntos)

Ejercicio 2.(12 puntos)
Consideramos el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ z = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ y la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con

$$f(z) = \frac{z}{sen(z)}$$

1. Clasificar las singularidades de f.(4 puntos)
2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$ tal que $\gamma(t) = e^{it}$. Calcular

$$\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)} \cdot \quad (\text{ 8 puntos})$$

Ejercicio 3.(9 puntos)
Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado.

1. Defina la función Ind_γ.(2 puntos)
2. Probar que la función Ind_γ toma valores enteros.(5 puntos)
3. Sea $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{i5t}$. Calcular $Ind_\gamma(\frac{1}{2} + \frac{i}{4})$.(2 puntos)

Ejercicio 4.(7 puntos)
Probar el siguiente resultado:
Teorema de Cauchy para un triángulo.
Sean Δ un triángulo cerrado contenido en un abierto Ω, f continua en Ω y que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si $\partial\Delta$ denota el borde del triángulo y a un camino cuya imagen es $\partial\Delta$ entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Solo probar el caso en que $p \notin \Delta$.