Funciones de variable compleja

Primer parcial, 28 de abril de 2017

N^o Parcial

Apellidos **Nombres** **N$^{\text{o}}$ de Cedula**

Ejercicio 1 (10 puntos)

(a) Probar que una transformación de Möbius queda determinada al dar la imagen de 3 puntos.

(b) Sea A el arco de circunferencia de radio $1/2$ que une el 0 con el 1 pasando por el semiplano $\mathrm{Im}(z) > 0$. Hallar una transformación de Möbius que lleve A al segmento $[0, 1]$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

(a) Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Probar que u y v son diferenciables y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

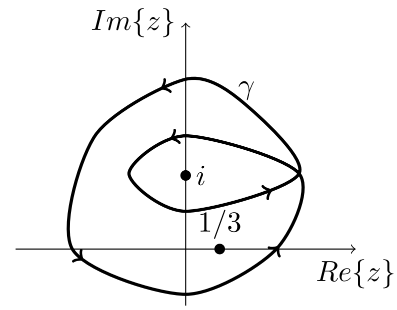
(b) Probar que e^z es holomorfa en $\mathbb{C}$.

(c) Probar que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f|$ es constante, entonces f es constante.

Ejercicio 3 (10 puntos)

(a) Definir índice de una curva respecto a un punto y probar que el índice siempre es un número entero.

(b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{1}{3z-1} + \frac{1}{z-i} \right) dz$, donde γ es la curva de la figura.



Ejercicio 4 (10 puntos)

(a) Probar que toda función holomorfa en un disco tiene primitiva en el disco.

(b) Se consideran las curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ (orientada en sentido antihorario) y $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 1/2\}$ (donde la primera parte está orientada en sentido horario y la segunda en sentido antihorario).

Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{0, i\})$ es tal que $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = i + 1$ y $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 2i$, calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, siendo γ la curva de la figura.