Funciones de variable compleja

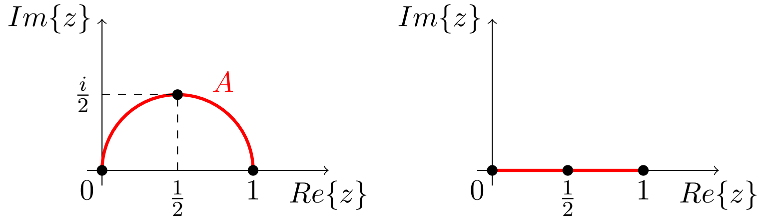
Primer parcial, 28 de abril de 2017

Solución

Ejercicio 1 (10 puntos)

(a) Ver teórico.

(b) Tenemos que transformar el conjunto A de la figura en el $[0,1]$.



Para eso, podemos encontrar una transformación de Möbius T tal que:

$$T(0)=0,\ T(1)=1 \text{ y } T\left(\frac{1+i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Si $T(z)$ es de la forma $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, entonces al imponer esas 3 condiciones tenemos:

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{b}{d}=0 \\ T(1) &= \frac{a+b}{c+d}=1 \\ T\left(\frac{1+i}{2}\right) &= \frac{a\left(\frac{1+i}{2}\right)+b}{c\left(\frac{1+i}{2}\right)+d}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

De la primera condición obtenemos $b=0$, y usando esa información despejamos a y d en función de c, obteniendo:

$$\begin{aligned} d &= \frac{c}{2}(-1+i) \\ a &= \frac{c}{2}(1+i) \end{aligned}$$

Entonces:

$$T(z)=\frac{\frac{c}{2}(1+i)z}{cz+\frac{c}{2}(-1+i)}=\frac{(1+i)z}{2z+i-1}$$

donde se cumple que $(1+i)(i-1)-2\times 0=-2\neq 0$, por lo que T es de Möbius.

Ejercicio 2 (10 puntos)

(a) Ver teórico.

(b) Podemos usar el recíproco de la parte anterior, que dice que si u y v son diferenciables y cumplen Cauchy-Riemann, entonces f es holomorfa.

Si $f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$, entonces $u(x,y)=e^x\cos y$ y $v(x,y)=e^x\sin y$, que son funciones diferenciables, por lo que resta ver que $u_x=v_y$ y $u_y=-v_x$. Hallando las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y,\ u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y,\ v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Entonces, se verifican las condiciones del teorema enunciado antes, por lo que e^z es holomorfa en $\mathbb{C}$.

(c) Si $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ tiene módulo constante, esto implica que $u^2(x,y) + v^2(x,y) = K$ con $K \in \mathbb{R}$. Asumamos que o $u \neq 0$ o $v \neq 0$ (ya que si ambas son 0 el resultado es trivial). Derivando esa igualdad respecto de x y de y, se tiene:

$$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x &= 0 \\ 2uu_y + 2vv_y &= 0 \end{aligned}$$

Como f es holomorfa, se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2uu_x - 2vu_y &= 0 \\ 2uu_y + 2vu_x &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera igualdad por u y la segunda por v y sumando, se obtiene:

$$2k(u^2+v^2)u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0$$

Análogamente, multiplicando la primera igualdad por $-v$ y la segunda por u y sumando, obtenemos:

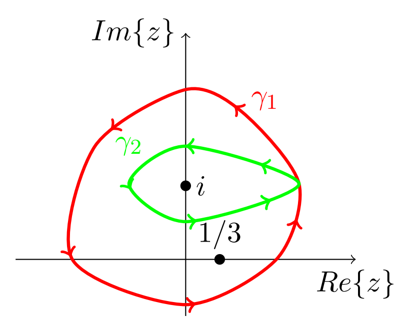
$$2k(u^2+v^2)u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0$$

Entonces $u_x = u_y = 0$ en todo $\mathbb{C}$, lo que implica por las ecuaciones de Cauchy-Riemann que $v_x = v_y = 0$ en $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es un abierto conexo, cualquier función en $\mathbb{C}$ diferenciable y con derivadas parciales nulas es constante, por lo que u y v son constantes, y por lo tanto f también.

Ejercicio 3 (10 puntos)

(a) Ver teórico.

(b) Podemos dividir a la curva γ en dos curvas γ_1 y γ_2 como en el dibujo:



Entonces:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \left(\frac{1}{3z-1} + \frac{1}{z-i} \right) dz &= \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{3z-1} + \frac{1}{z-i} \right) dz + \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{3z-1} + \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \frac{1}{3} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-\frac{1}{3}}\, dz + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i}\, dz + \frac{1}{3} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-\frac{1}{3}}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-i}\, dz \end{aligned}$$

Usando la definición de índice y el teorema que dice que el índice cuenta la cantidad de vueltas de una curva alrededor de un punto, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-\frac{1}{3}}\,dz &= 2\pi i \\
\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-i}\,dz &= 2\pi i \\
\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-\frac{1}{3}}\,dz &= 0 \\
\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-i}\,dz &= 2\pi i
\end{aligned}
$$

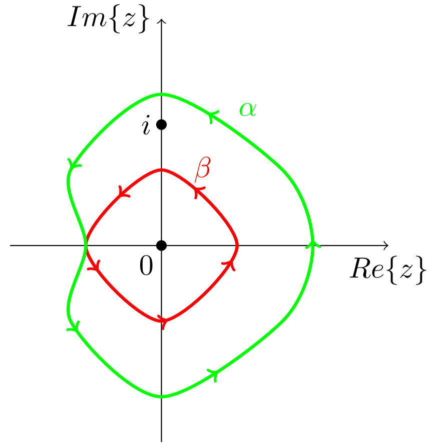
Entonces:

$$\int_{\gamma} \left(\frac{1}{3z-1}+\frac{1}{z-i}\right) dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}+1+1\right) = \frac{14\pi i}{3}$$

Ejercicio 4 (10 puntos)

(a) Ver teórico.

(b) Podemos dividir a la curva γ en las dos curvas α y β de la figura:



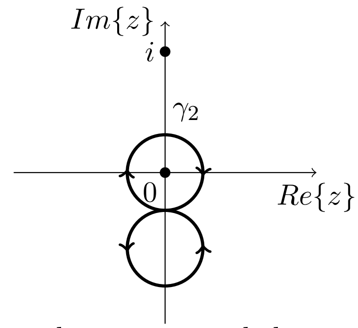
Entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz$$

Como la curva γ_1 gira alrededor del 0 y del i en el mismo sentido que la curva α, como corolario del teorema de Cauchy tenemos que:

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = i+1$$

La curva γ_2 se muestra en la siguiente figura:



En la circunferencia de abajo, f es holomorfa, por lo que su integral en esa parte de la curva es 0. La circunferencia de arriba gira alrededor del 0 en sentido opuesto a la curva β, por lo que:

$$\int_\beta f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -2i$$

Entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz = i + 1 - 2i = 1 - i$$