Solución Primer Parcial 2016
Funciones de Variable Compleja

Ejercicio 1. Ver teórico.

Ejercicio 2.

a) $e^z = e^{x+iy} = e^x(cos(y) + isen(y))$
$L(z) = L|z| + iarg(z),\ arg(z) \in [0, 2\pi)$

b)
$$\int_\gamma \frac{1}{z} + e^z = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma e^z\ dz$$

Dado que la función e^z es holomorfa en $\mathbb{C}$, lo cual es un conjunto simplemente conexo, por el teorema de Cauchy global la segunda integral vale cero. Luego por la definición de índice o por la fórmula de Cauchy se obtiene que la primera integral vale $2\pi i$. Otra forma para calcular la primera integral, es utilizando que la integral en γ es igual a la integral en una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro 0 y radio r orientada en sentido antihorario, como consecuencia del teorema de Cauchy. En ese caso:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} = \int_\mathcal{C} \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\ dt = 2\pi i.$$

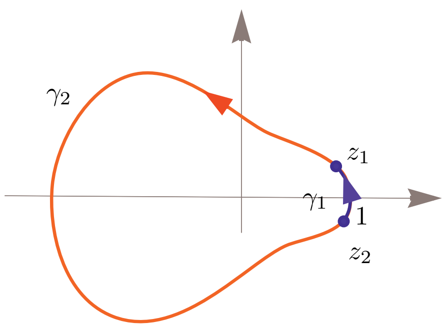
Por último:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} + e^z = 2\pi i.$$

Veremos otra forma para calcular la integral, sin usar el teorema de Cauchy ni la definición de límite.

Para calcular la segunda integral podemos utilizar que e^z tiene primitiva en $\mathbb{C}$ y por ser una curva cerrada la integral vale cero. Para la primera integral, la primitiva de $\frac{1}{z}$ es $L(z)$, sin embargo esta función es una primitiva en todo el plano complejo menos en una semirecta con origen en cero. Si definimos el argumento del logaritmo entre $[0, 2\pi)$ la función $\frac{1}{z}$ no tendrá primitiva en la semirecta de los reales positivos. Dado que la curva pasa por la semirecta en el punto 1 no podemos usar la regla de Barrow. Observar que dado que la curva rodea el cero, no importa en cual sea la semirecta donde no tenga primitiva, siempre γ cortará esa semirecta.

Para calcular esta integral procederemos de la siguiente forma. Separaremos la curva γ en dos curvas γ_1 y γ_2 como se muestra en la siguiente figura.



Tenemos que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$$

Para la segunda integral podemos utilizar la regla de Barrow.

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = L(z_2) - L(z_1).$$

Sea $\epsilon = long(\gamma_1)$, para la primer integral tenemos que:

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \right| \leq max_{z\in\gamma_1} \left|\frac{1}{z}\right| \epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

Podemos deducir que el límite da cero ya que $1/z$ está acotada en γ_1. Cuando ϵ tiende a cero, tenemos que tanto z_2 como z_1 tienden a 1,el primero acercandose por debajo del eje real y el segundo por arriba. Por lo tanto:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \lim_{\epsilon\to 0} L(z_2) - L(z_1)$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \lim_{\epsilon\to 0} L|z_2| - L|z_1| + i(arg(z_2) - arg(z_1)) = 2\pi i.$$

Alcanzando el mismo resultado que con el método anterior.

c)

$$ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

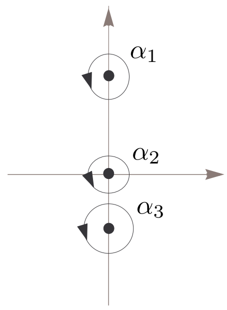
El indice representa la cantidad de vueltas que da la curva γ al rededor de a. En sentido antihorario se considera positivo y en sentido horario se considera negativo.

Podemos relacionar esta integral con la cantidad de vueltas usando el segundo método para resolver la parte b). Si ahora tenemos una curva que da n vueltas al rededor de a y queremos calcular la integral de $\frac{1}{z-a}$, podemos proceder de forma análoga y obtendríamos que por cada vez que corta la semirecta donde la función no tiene primitiva se suma (o resta dependiendo el sentido) $2\pi i$. Dando como resultado a la integral $2\pi i$.

Ejercicio 3. Ver teórico.

Ejercicio 4.

a) Consideremos las siguientes curvas:



Por el teorema de Cauchy podemos deducir que dado $\gamma \subset \mathbb{C} - \{i, 0, -i/2\}$ una curva cualquiera se cumple que:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = ind(\gamma_1, i)\int_{\alpha_1} f(z)\ dz + ind(\gamma_1, 0)\int_{\alpha_0} f(z)\ dz + ind(\gamma_1, -i/2)\int_{\alpha_3} f(z)\ dz.$$

Llamaremos $A = \int_{\alpha_1} f(z)\ dz,\ B = \int_{\alpha_2} f(z)\ dz$ y $C = \int_{\alpha_3} f(z)\ dz$. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \int_{\gamma_1} f(z)\ dz = A - B - C = \pi \\ \int_{\gamma_2} f(z)\ dz = 2A + C = \pi \\ \int_{\gamma_3} f(z)\ dz = -B - C = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = -\pi,\ B = -5\pi,\ C = 3\pi$$

Por último:

$$\int_\alpha f(z)dz = A - B + C = 7\pi.$$

b) f no puede extenderse de forma continua ya que en ese caso las integrales en las curvas α_1, α_2 y α_3 tendrían que valer cero.

Ejercicio 5.

a) Ver teórico

b) Sea $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} T(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1 \\ T(-1) = \frac{b-a}{d-c} = -1 \\ T(0) = \frac{b}{d} = i \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = -id, \; c = b, \; d = -ib.$$

Escogiendo $b = 1$ tenemos que:

$$T(z) = \frac{-zi+1}{z-i}.$$

c) Como en la parte anterior escogimos tres puntos del eje real y T los transformó en tres puntos no alineado, por la parte a) deducimos que T transforma en el eje real en una circunferencia a la cual deben pertenecer los puntos 1,-1 e i. La circunferencia que contiene esos tres puntos es la circunferencia de radio 1 centro cero.

Si consideramos el eje real orientado hacia la derecha, la circunferencia queda orientada en sentido horario. Dado que las transformaciones de Moebius conservan la orientación del plano, la imagen de lo que está a la derecha del eje real también quedará a la derecha de la circunferencia. Por lo tanto T transforma el semiplano inferior en el disco D.