Funciones de variable compleja

Primer parcial, 4 de mayo de 2015

N^o Parcial

Apellidos **Nombres** **N^o de Cedula**

Problema 1.

(Valor: 14 puntos.)

a. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica en Ω (i.e. $u_{xx} + u_{yy} = 0$). Mostrar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$
b. Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$. ¿Existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $Re(f) = u$? En caso afirmativo, calcular $v(x, y)$ para que $f = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$, sabiendo que $v(-1, 1) = -2$.

Problema 2.

(13 puntos)

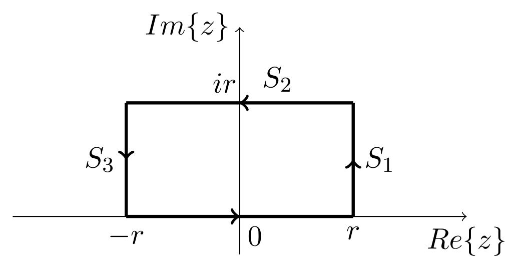
a. Sean z_1, z_2 y z_3 complejos del plano compactificado, distintos entre sí. Probar que existe y es única la Transformación de Möbius que lleva 0, 1 e ∞ a z_1, z_2 y z_3 respectivamente.
b. Hallar la Transformación de Möbius que lleva 0, 1 e i a -1, 1 e ∞ respectivamente.

Problema 3.

(14 puntos)

a. Enunciar y demostrar la fórmula integral de Cauchy local en el Disco.
b. Sea R el rectángulo de la figura, donde $r > 1$:

Calcular
$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2 + 1}$$



c. Sean S_1, S_2 y S_3 los segmentos del rectángulo según la figura. Probar que:
$$\int_{S_i} \frac{dz}{z^2 + 1} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$$
para $i = 1, 2, 3$.

Sugerencia: Utilizar el teorema de acotación de integrales $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|$ y luego tomar límite cuando $r \to +\infty$.

d. Concluir que:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$$