Funciones de variable compleja

Primer parcial, 4 de mayo de 2015

Resolución

Problema 1.
(14 puntos)

a. La idea es definir un campo (P,Q) irrotacional en Ω usando que u es armónica. Para ello tomemos $P(x,y) = -u_y(x,y)$ y $Q(x,y) = u_x(x,y)$. El rotor del campo (P,Q) es

$$Q_x - P_y = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ya que u es armónica. Como Ω es simplemente conexa, el campo tendrá que tener un potencial escalar, es decir, debe existir una función escalar $v(x,y)$ tal que $\nabla v = (P,Q)$:

$$\nabla v = (P,Q) \Leftrightarrow (v_x, v_y) = (P,Q) \Leftrightarrow P(x,y) = v_x(x,y) \text{ y } Q(x,y) = v_y(x,y)$$

Esta v será la parte real de la f holomorfa que estamos buscando. En efecto, definamos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x+iy$ y verifiquemos que f está en las hipótesis de Cauchy-Riemann. Por un lado u y v son funciones $\mathcal{C}^2$ (u por ser armónica y v porque su gradiente está compuesto por las parciales de u). Esto implica que son funciones $\mathcal{C}^1$, que es la primer condición que debe cumplirse para que se aplique el teorema de Cauchy-Riemann. La segunda es que se verifiquen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_x &= \quad v_y \\ u_y &= \ -v_x \end{aligned}$$

Estas se verifican por la misma definición de v, ya que $v_x = P = -u_y$ y $v_y = Q = u_x$, probando lo que se pedía.

b. Verifiquemos que u es armónica para aplicar la parte anterior:

$$u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$$

Por lo tanto, el teorema anterior nos dice cómo construir la función holomorfa f: su parte imaginaria v debe verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x &= \quad v_y \Leftrightarrow v_y = 3x^2 - 3y^2 \\ u_y &= \ -v_x \Leftrightarrow v_x = 6xy - 2 \end{aligned}$$

Integrando la segunda respecto a x se tiene que $v(x,y) = 3x^2y - 2x + g(y)$. Derivando respecto a y e igualando a la primer ecuación:

$$v_y = 3x^2 + g'(y) = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow g'(y) = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 + K$$

por lo que $v(x,y) = 3x^2y - 2x - y^3 + K$. El valor de K se obtiene imponiendo $v(-1,1) = -2$:

$$v(-1,1) = 4 + K = -2 \Rightarrow \boxed{K = -6}$$

Dado que u y v son $\mathcal{C}^\infty$ en todo el plano, f será holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Problema 2.
(13 puntos)

a. Queremos probar que existe y es única la Transformación de Möbius f que lleva 0, 1 e ∞ a z_1, z_2 y z_3 respectivamente. Para que f sea de Möbius se debe cumplir

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ , con } ad - bc \neq 0$$

Impongamos las condiciones que queremos que se cumplan:

$$f(0) = \frac{b}{d} = z_1 \tag{1}$$

$$f(1) = \frac{a+b}{c+d} = z_2 \tag{2}$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} = z_3 \tag{3}$$

Dividiremos la prueba en 4 casos:

- **Caso 1**: $z_1 = \infty$, $z_2 \neq \infty$ y $z_3 \neq \infty$.
  Como $z_1 = \infty$, por la ecuación (1) necesariamente debe cumplirse $d = 0$. De la ecuación (3) se sabe además que $a = cz_3$. Sustituyendo estas dos ecuaciones en (2) resulta:
  $$cz_3 + b = cz_2 \Rightarrow b = c(z_2 - z_3)$$
  Por lo tanto la transformación f queda:
  $$f(z) = \frac{cz_3z + c(z_2 - z_3)}{cz} = \frac{z_3z + (z_2 - z_3)}{z}$$
  que es única pues depende únicamente de z_2 y z_3. Verifiquemos que es de Möbius:
  $$ad - bc = -(z_2 - z_3) \neq 0$$
  ya que por hipótesis $z_2 \neq z_3$.
- **Caso 2**: $z_1 \neq \infty$, $z_2 = \infty$ y $z_3 \neq \infty$.
  Como $z_2 = \infty$, por la ecuación (2) necesariamente debe cumplirse $c + d = 0 \Rightarrow c = -d$. De la ecuación (ref1) se sabe además que $b = dz_1$ y de (3) resulta $a = cz_3 = -dz_3$. Por lo tanto la transformación f queda:
  $$f(z) = \frac{-dz_3z + dz_1}{-dz + d} = \frac{-z_3z + z_1}{-z + 1}$$
  que es única pues depende únicamente de z_1 y z_3. Verifiquemos que es de Möbius:
  $$ad - bc = -z_3 + z_1 \neq 0$$
  ya que por hipótesis $z_1 \neq z_3$.
- **Caso 3**: $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$ y $z_3 = \infty$.
  Como $z_3 = \infty$, por la ecuación (3) necesariamente debe cumplirse $c = 0$. De la ecuación (1) se sabe además que $b = dz_1$, por lo que sustituyendo en (2) resulta:
  $$a + dz_1 = dz_2 \Rightarrow a = d(z_2 - z_1)$$
  Por lo tanto la transformación f queda:
  $$f(z) = \frac{(z_2 - z_1)dz + dz_1}{d} = (z_2 - z_1)z + z_1$$

que es única pues depende únicamente de z_1 y z_2. Verifiquemos que es de Möbius:

$$ad - bc = z_2 - z_1 \neq 0$$

ya que por hipótesis $z_1 \neq z_2$.

- **Caso 4**: $z_1 \neq \infty$, $z_2 \neq \infty$ y $z_3 \neq \infty$.
  Como $z_1 \neq \infty$, de la ecuación (1) resulta $b = dz_1$. Además $z_3 \neq \infty$, por lo que la ecuación (3) implica $a = cz_3$. Sustituyendo en (2) resulta:

$$cz_3 + dz_1 = (c+d)z_2 \Rightarrow c = d\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} \Rightarrow a = dz_3\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$$

  Por lo tanto la transformación f queda:

$$f(z) = \frac{dz_3\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}z + dz_1}{d\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}z + d} = \frac{z_3(z_2-z_1)z + z_1(z_3-z_2)}{(z_2-z_1)z + (z_3-z_2)}$$

  que es única pues depende únicamente de z_1, z_2 y z_3. Verifiquemos que es de Möbius:

$$ad - bc = z_3(z_2-z_1)(z_3-z_2) - z_1(z_3-z_2)(z_2-z_1) = (z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_2-z_1) \neq 0$$

  ya que por hipótesis z_1, z_2 y z_3 son distintos entre sí.

b. Queremos una f de Möbius tal que $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ y $f(i) = \infty$. Para que f sea de Möbius debe cumplirse:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\text{ , con } ad - bc \neq 0 \tag{4}$$

Imponiendo las condiciones $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ y $f(i) = \infty$ sobre la ecuación (4) resulta:

$$f(0) = \frac{b}{d} = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -d \tag{5}$$

$$f(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = c + d \tag{6}$$

$$f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \infty \quad \Rightarrow \quad ci + d = 0 \tag{7}$$

De la ecuación (7) resulta

$$c = -\frac{d}{i} = di \tag{8}$$

Sustituyendo (5) y (8) en (6) se puede despejar a en función de d:

$$a - d = di + d \Rightarrow a = d(i+2)$$

Por lo tanto la f buscada resulta

$$f(z) = \frac{d(i+2)z - d}{diz + d} \Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{(i+2)z - 1}{iz+1} = \frac{(1-2i)z + i}{z - i}}$$

Problema 3.
(14 puntos)

a. Ver teórico.

b. La idea es aplicar la parte a. Para ello, aplicando fracciones simples se obtiene:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

Entonces:

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left[\int_{\partial R} \frac{dz}{z+i} - \int_{\partial R} \frac{dz}{z-i}\right]$$

El punto $-i$ queda fuera del rectángulo, por lo que la función $\frac{1}{z+i}$ es holomorfa en el interior del mismo. Así, al ser ∂R una curva cerrada, por Cauchy se tiene que

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z+i} = 0$$

Como $r > 1$, el punto i pertenece al interior del rectángulo R. Entonces aplicando la fórmula integral de Cauchy, la segunda integral resulta

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

Entonces

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}(0 - 2\pi i) \Rightarrow \boxed{\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = \pi}$$

c. Aplicando el teorema de acotación de integrales se tiene

$$\left|\int_{S_i} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \int_{S_i} \frac{1}{|z^2+1|}|dz|$$

para $i = 1, 2, 3$. La idea es acotar $\frac{1}{|z^2+1|}$ en cada segmento. Como corolario de la desigualdad triangular se tiene que[1]:

$$|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$$

Entonces:

$$|z^2+1| \ge ||z^2| - |-1|| = ||z|^2 - 1|$$

Ahora, como $r > 1$, para todo $z \in S_i$ se cumple que $|z| \ge r > 1 \Rightarrow |z|^2 > 1$, por lo que

$$|z^2+1| \ge |z|^2 - 1 \ge r^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{r^2-1}\ \forall z \in S_i$$

Entonces resulta:

$$\left|\int_{S_i} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{1}{r^2-1}\int_{S_i} |dz| = \frac{long(S_i)}{r^2-1}$$

Los segmentos S_1 y S_3 tienen longitud r, por lo que en esos segmentos se tiene:

$$\left|\int_{S_i} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{r}{r^2-1} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si } i = 1, 3$$

La longitud de S_2 es $2r$, por lo que aplicando el mismo razonamiento se concluye que:

$$\left|\int_{S_2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{2r}{r^2-1} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

probando lo que se pedía.

---

[1]Esta propiedad puede demostrarse fácilmente considerando la desigualdad triangular $|w+v| \le |w|+|v|$ y aplicándola a $w = z_1 - z_2$ y $v = z_2$ por un lado y a $w = z_2 - z_1$ y $v = z_1$ por otro.

d. Si llamamos S_4 al segmento inferior del rectángulo, se cumple que:

$$\pi = \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{S_1} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{S_2} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{S_3} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{S_4} \frac{dz}{z^2+1}$$

Además, las integrales sobre S_1, S_2 y S_3 tienden a 0 cuando $r \to +\infty$, por lo que tomando límite cuando $r \to +\infty$:

$$\pi = \lim_{r \to +\infty} \int_{S_4} \frac{dz}{z^2+1}$$

Calculemos la integral utilizando la definición. Tomamos $s_4(x) = x$ con $x \in [-r, r]$ como parametrización de S_4, por lo que $\dot{s}(x) = 1$ y

$$\pi = \lim_{r \to +\infty} \int_{S_4} \frac{dz}{z^2+1} = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

demostrando lo que queríamos.