

Funciones de variable compleja
Primer parcial, 20 de mayo de 2014

N° Parcial

Apellidos	Nombres	N° de Cedula
-----------	---------	--------------

Problema 1.

(13 puntos)

- a. Sea $f = u + iv$ una función compleja definida en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ probar que si u y v son diferenciables y $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ en Ω entonces f es holomorfa en Ω
- b. Sea

$$f(x + iy) = x + ay + i(bx + cy).$$

- (i) Determinar valores de a, b y c reales para que la función f sea holomorfa en \mathbb{C} .
- (ii) Para el menor valor entero positivo de a calcular $f'(x + iy)$.

Problema 2.

(13 puntos)

- a. Probar que toda transformación de Möbius tiene puntos fijos en $\overline{\mathbb{C}}$.
- b. Sea f una transformación de Möbius con un solo punto fijo. Probar que existe una transformación de Möbius g tal que $gfg^{-1}(z) = z + 1$.
- c. Determinar una transformación de Moebius que lleve el semiplano $\{z / \text{Im}(z) \geq \text{Re}(z)\}$ en el disco $\{z / |z| \leq 1\}$. ¿Es única esta transformación?

Problema 3.

(14 puntos)

Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro a y radio r .

- a. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - a}$ y deducir el valor de $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - w}$ para todo w tal que $|a - w| < r$
- b. Probar que $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - w} dz$ con $|w - a| < r$
- c. Calcular discutiendo según valores de $a \in \mathbb{C}$

$$\int_{|z - a|=1} \frac{z^2 - 2}{z - a} dz$$

En este ejercicio se pueden usar (enunciándolas) las propiedades del índice y se admiten el teorema de Cauchy en un disco y el siguiente corolario:

Sea D un disco, $f \in \mathcal{H}(D - \{a\})$ y $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \forall \gamma \subset D$ cerrada tal que $a \notin \gamma$