Primer parcial de Funciones de Variable Compleja.

4 de mayo de 2013.

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Núm. examen

Nota: Cada parte vale 5 puntos, con un máximo de 40. La duración del parcial es de 3 horas.

1. En el plano complejo $\mathbb{C}$ sean los siguientes conjuntos:

$$\alpha_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{z-1}{1+i} \in \mathbb{R}, \ \ |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{3}\}, \qquad \alpha_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon (z-2)(\overline{z}-2) = 1\}.$$

   a) Dibujar los conjuntos α_1 y α_2.

   b) Probar que α_1 y α_2 son curvas en el plano complejo dando alguna parametrización $z = z(t)$ de cada una de ellas que no anule $\dot{z}(t)$.

   c) Calcular las integrales

$$\int_{\alpha_1} z\, dz, \quad \int_{\alpha_2} \frac{e^{(z^2)}}{3z-5}\, dz,$$

   donde α_1 y α_2 están recorridas una sola vez y orientadas según el parámetro creciente en la parametrización que se haya dado de cada curva en la parte b).

   Nota: Justificar las respuestas. Si se utiliza algún teorema, deberá escribir el enunciado (hipótesis y tesis, sin demostración).

2. *a*) Encontrar una transformación de Moebius T que lleve el disco $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ en el semiplano $S := \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) > 2\}$ y tal que $T(1) = 2$, $\lim_{z \to i} T(z) = \infty$.

   b) Sean α_1 y α_2 las curvas dadas en el ejercicio 1. Probar que las dos curvas imágenes $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ son arcos de circunferencias.

   c) Hallar el ángulo (en valor absoluto) que forman las curvas imágenes $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ en el punto $w_0 = 2$.

3. (Teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración.)

   Sea $f(z)$ una función continua para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva diferenciable orientada. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Se considera la siguiente integral: $g(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$.

   a) Demostrar que $g(w)$ es una función analítica para $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

   b) Demostrar que $g'(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz$.