Soluciones del primer parcial de Funciones de Variable Compleja.

4 de mayo de 2013.

Nota: Cada parte vale 5 puntos, con un máximo de 40.

1. En el plano complejo $\mathbb{C}$ sean los siguientes conjuntos:

$$\alpha_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{z-1}{1+i} \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{3}\}, \qquad \alpha_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon (z-2)(\overline{z}-2) = 1\}.$$

a) Dibujar los conjuntos α_1 y α_2.

Solución: α_2 es una circunferencia de centro en $2+0i$ y radio 1. α_1 es el segmento de recta con extremos en los puntos $(1-\sqrt{3})-\sqrt{3}i$ y $(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}i$.

b) Probar que α_1 y α_2 son curvas en el plano complejo dando alguna parametrización $z = z(t)$ de cada una de ellas que no anule $\dot{z}(t)$.

Solución: α_2 es una curva porque es una circunferencia, y α_1 es una curva porque es un segmento de recta. Una parametrización de la circunferencia α_2 es $z(t) = 2 + e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ porque tiene centro en 2 y radio 1. Una parametrización del segmento de recta α_1 es $z(t) = 1 + t(1+i), \quad -\sqrt{3} \leq t \leq +\sqrt{3}$, porque pasa por el punto 1, es colineal con el vector $(1+i)$, y sus extremos se obtienen dando a t los valores $-\sqrt{3}$ y $+\sqrt{3}$ respectivamente.

c) Calcular las integrales

$$\int_{\alpha_1} z\, dz, \quad \int_{\alpha_2} \frac{e^{(z^2)}}{3z-5}\, dz,$$

donde α_1 y α_2 están recorridas una sola vez y orientadas según el parámetro creciente en la parametrización que se haya dado de cada curva en la parte b). **Solución:** Aplicamos la definición de integral de una función compleja a lo largo de una curva:

$$\int_{\alpha_1} z\, dz = \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \Big(z(t) \cdot \dot{z}(t)\Big)\, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \Big(1 + t(1+i)\Big)\,(1+i)\, dt =$$

$$(1+i)\Big(t + (1/2)(1+i)t^2\Big)\Big|_{t=-\sqrt{3}}^{t=+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}(1+i).$$

Para calcular la segunda integral, aplicamos la Fórmula de Cauchy global (el enunciado está en el libro de Teórico). Podemos aplicarlo porque la función $e^{(z^2)}$ es holomorfa en todo el plano complejo y todo el plano complejo es simplemente conexo α_2 es una curva cerrada. También puede aplicarse la Fórmula de Cauchy local (en discos abiertos) en el disco $D_r(2)$ con cualquier $r > 1$, por ejemplo $r = 3$ (el enunciado está en el libro de Teórico). Podemos aplicarlo porque la función $e^{(z^2)}$ es holomorfa en $\Omega := \mathbb{C}$, y $D_r(2) \subset \Omega$ y α_2 es una curva cerrada contenida en $D_r(2)$. Entonces

$$\int_{\alpha_2} \frac{e^{(z^2)}}{3z-5}\, dz = \frac{1}{3} \int_{\alpha_2} \frac{e^{(z^2)}}{z-5/3}\, dz = \frac{2\pi i}{3} \cdot e^{(5/3)^2} \cdot \mathrm{Ind}_{\alpha_2}(5/3) = \frac{2\pi i}{3} \cdot e^{25/9}.$$

En la última igualdad usamos que la circunferencia α_2, recorrida una sola vez y orientada según la parametrización dada en la parte b) (en sentido antihorario), cumple $\mathrm{Ind}_{\alpha_2}(5/3) = 1$, es decir, α_2 da una sola vuelta antihoraria alrededor del punto $5/3$, porque $5/3$ está en el interior del círculo cuyo borde es α_2.

2. *a*) Encontrar una transformación de Moebius T que lleve el disco $D := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ en el semiplano $S := \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > 2\}$ y tal que $T(1) = 2, \quad \lim_{z \to i} T(z) = \infty$.

Solución: En la esfera de Riemann: $T(i) = \infty$ significa que $T(z) = (az+b)/(z-i)$. Sustituyendo $T(1) = 2$ obtenemos

$$a + b = 2(1 - i) = 2 - 2i.$$

Ahora, cuando recorremos el arco A de la circunferencia borde del disco D, desde el punto 1 hasta el punto i en sentido antihorario, dejamos el disco D a la izquierda. Entonces al aplicar T debemos estar recorriendo el borde del semiplano S desde el punto $T(1) = 2$ hasta el $T(i) = \infty$ dejando al semiplano S también *a la izquierda.* Esto significa que recorremos la semirrecta $s \subset \{\mathrm{Re}(z) = 2\}$ desde el punto 2 hasta infinito *para abajo.* Luego, cuando recorremos desde ∞ hasta el punto 2 a la semirrecta s' opuesta de s, también orientada s' hacia abajo, al aplicar T^{-1} debemos estar recorriendo la parte de la circunferencia que es preimagen por T de la semirrecta s'. Esto es el arco A' complementario al arco A recorrido antes, siempre en el mismo sentido que antes (el antihorario). Este es el arco A' que va desde el punto i hasta el punto 1 en sentido antihorario. Tomamos un punto, por ejemplo $-i \in A'$. Tomamos un punto, por ejemplo $2 + i \in s'$. Hacemos $T(-i) = 2 + i$. Queda

$$-ai + b = (2 + i)(-i - i) = 2 - 4i$$

Ahora resolvemos el sistema dado por las dos ecuaciones

$$a + b = 2 - 2i, \quad -ai + b = 2 - 4i.$$

Tiene solución $a = i + 1,\ b = 1 - 3i$. Entonces una transformación T de Moebius que cumple todas las condiciones especificadas es:

$$T(z) = \frac{(1 + i)z + (1 - 3i)}{z - i}$$

(Nota: No es la única posible).

b) Sean α_1 y α_2 las curvas dadas en el ejercicio 1. Probar que las dos curvas imágenes $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ son arcos de circunferencias.

Solución: α_1 es un segmento de la recta r que pasa por el punto 1 y es colineal con el vector $1 + i$, es decir forma un ángulo $\pi/4$ con el eje real. Como $\alpha_1 \subset r$, deducimos que la imagen $T(\alpha_1)$ está contenida en la imagen $T(r)$. Como T es una transformación de Moebius, $T(r)$ es o bien una recta (cuando $T^{-1}(\infty) \in r$) o bien una circunferencia (cuando $T^{-1}(\infty) \notin r$). Como $T(i) = \infty$ y toda transformación de Moebius es biyectiva de la esfera de Riemann en sí misma, tenemos $T^{-1}(\infty) = i$. Como $i \notin r$, porque la recta r pasa por el punto 1 y forma ángulo $\pi/4$ con el eje real, entonces $T^{-1}(\infty) \notin r$. Deducimos que $T(r)$ es una circunferencia. Luego $T(\alpha_1) \subset T(r)$ es un arco de circunferencia.

Ahora veamos $T(\alpha_2)$. Como α_2 es una circunferencia, entonces $T(\alpha_2)$ es, o bien una recta (cuando $T^{-1}(\infty) \in \alpha_2$), o bien una circunferencia (cuando $T^{-1}(\infty) \notin \alpha_2$). Como $T^{-1}(\infty) = i$, e $i \notin \alpha_2$, deducimos que $T(\alpha_2)$ es una circunferencia.

c) Hallar el ángulo (en valor absoluto) que forman las curvas imágenes $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ en el punto $w_0 = 2$.

Solución: $T^{-1}(2) = 1$ porque $T(1) = 2$. Como α_1 y α_2 se intersecan en $z_0 = 1$, entonces $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ se intersecan en $w_0 = T(z_0) = T(1) = 2$. T es de Moebius; entonces es conforme. Luego, el ángulo que forman α_1 y α_2 en $z_0 = 1$ es igual que el ángulo que forman sus imágenes $T(\alpha_1)$ y $T(\alpha_2)$ en $w_0 = T(z_0) = 2$. Entonces busquemos el ángulo que forma la recta α_1 con la circunferencia α_2 al intersecarse en el punto $z_0 = 1$. La tangente a la recta α_1 es ella misma. Forma ángulo $\pi/4$ con el eje real. La tangente a la circunferencia $\alpha_2 = \{|z-2| = 1\}$ en el punto $z_0 = 1$ es vertical. Entonces forma ángulo $\pi/4$ (en valor absoluto) con la recta α_1. Concluimos que la respuesta a la pregunta de la parte (c) es $\pi/4$.

3. (Teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración.)
Sea $f(z)$ una función continua para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva diferenciable orientada. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Se considera la siguiente integral: $g(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$.

   a) Demostrar que $g(w)$ es una función analítica para $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

   b) Demostrar que $g'(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$.

   Respuesta de partes (a) y (b): Ver libro de teórico.