Primer Parcial de Función de Variable Compleja.
Curso 2012

Montevideo, 2 de mayo de 2012.

Parcial Nro:.............. Apellido:.. C.I.: ....

1. Ejercicio

a) Mostrar que si $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ son complejos tales que $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ y $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$, entonces existe una transformación de Möebius T tal que $Tz_i = w_i$ con $i = 1, 2, 3$.
Observación: No se pide demostrar la unicidad.

b) Hallar una transformación de Möebius que lleve el interior del disco unidad $\mathbb{D}$ en el semiplano $\mathrm{Im}(z) < 0$.

c) Encontrar una función conforme que transforme la región $\{z \in \mathbb{C} : \pi/3 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3\}$ en $\mathbb{D}$.

2. Ejercicio

a) Demostrar que si F es una primitiva de f entonces, para toda curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

b) Sea $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = (1 + t)^5 e^{it}$ y $f(z) = 1/z$. Hallar $\int_\gamma f(z)dz$.

c) Sea Ω una región (abierto y conexo) del plano. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Demostrar que si para toda curva cerrada γ en Ω, la integral $\int_\gamma f(z)dz = 0$, entonces f posee primitiva.

3. Ejercicio

Sea γ el semicírculo $\{z : |z| = 1, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ recorrido en sentido antihorario. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|$ y sea $g(z)$ definida por

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

a) Hallar $\int_\gamma z^{-n} dz$ para $n = 1, 2, \ldots$.

b) Demostrar que f no es holomorfa. Decir cual es el dominio de definición de g y demostrar que es holomorfa. Justifique sus respuestas (puede hacerlo a través de cualquier teorema visto en el teórico).

c) Hallar el desarrollo de Taylor de g con centro $a = 0$.

d) Hallar el radio de convergencia del siguiente desarrollo, justificando su respuesta:

$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots$$

SOLUCIONES

Solución Ejercicio 1

a Ver teórico.
b Usando la parte (a), una posible transformación T que cumpla lo que se pide sería una transformación tal que $T(1) = 0$, $T(i) = \infty$ y $T(-1) = 1$. Esta transformación es

$$T(z) = \frac{z-1}{z-i}\left(\frac{1-i}{-2}\right) = \frac{(-1-i)(z-1)}{-2z+2i}$$

Para verificar que el interior de $\mathbb{D}$ se transforma en $\mathrm{Im}(z) < 0$ basta notar que $T(0) = (1+i)/2i = (-i+1)/2$ cuya parte imaginaria es $-1/2 < 0$.
c Para hacer esto, primero encontramos una función holomorfa que lleve la región $\pi/3 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3$ en $Im(z) < 0$, una función que hace esto es $f(z) = z^3$. De esa forma, la función holomorfa que transforma la regiÚn $\pi/3 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/3$ en $\mathbb{D}$ es $g(z) = T^{-1}(z^3)$. Para ver que esta transformación es conforme, calculamos su derivada: $g'(z) = 3z^2/T'(g(z))$ y se cumple que $g'(z) \neq 0$ para ningún punto del dominio. Esto implica que g es conforme.
Una formula explicita para g es

$$g(z) = \frac{-2z^3 - 1 - i}{2z^3 - 1 - i}$$

Solución Ejercicio 2: Las partes a) y c) son teóricas.

Para hacer la parte b), basta encontrar una primitiva de $1/z$ definida en un dominio que incluya la curva γ y evaluar en los extremos de dicha curva. Una primitiva de $1/z$, como vimos en el teórico, es cualquier logaritmo. Un logaritmo que contiene a la curva γ, es, por ejemplo $\log_{(a,b)}$ con $(a,b) = (-\pi/2, 3\pi/2)$. Por lo tanto

$$\int_\gamma f = \log_{(a,b)}(\gamma(\pi)) - \log_{(a,b)}(\gamma(0)) = \log_{(a,b)}((1+\pi)^5(-1)) - \log_{(a,b)}(1) = \ln((1+\pi)^5) + \pi i - 0 = 5\ln(1+\pi) + \pi i.$$

Solución Ejercicio 3:

a) Para hallar $\int_\gamma z^{-n}dz$ obtendremos una primitiva de z^{-n}. Si $n > 1$ la primitiva puede ser $z^{-n+1}/(1-n)$. Si $n = 1$, entonces podemos tomar $\log_{(a,b)}(z)$ con $(a,b) = (-\pi/2, 3\pi/2)$. De esta forma

$$\int_\gamma z^{-n}dz = \begin{cases} \log_{(a,b)}(-1) - \log_{(a,b)}(1) & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{-n+1}/(1-n) - 1^{-n+1}/(1-n) & \text{si } n > 1. \end{cases} = \begin{cases} \pi i & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1, n \text{ impar.} \\ 2/(n-1) & \text{si } n > 1, n \text{ par.} \end{cases}$$

b) f no es holomorfa, pues al ser constante en $|z| = 1$ debería serlo siempre (si fuera holomorfa), lo cual es falso ($|1| \neq |2|$). la función g es holomorfa, por el Lema 2.6 visto en el teórico.

c) Parar hallar el desarrollo de Taylor de g con centro $a = 0$, basta computar $g^{(n)}(0)$. Para ello, usamos el Lema 2.6, visto en el teórico. Del mismo sabemos que si

$$g_n(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n}dw.$$

entonces $g_n'(z) = ng_{n+1}(z)$. Por lo tanto $g^{(n)}(z) = n!g_{n+1}(z)$, de donde

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \int_\gamma \frac{|w|}{w^{n+1}}dw = \int_\gamma \frac{1}{w^{n+1}}dw = \begin{cases} \pi i & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0, n \text{ par.} \\ 2/n & \text{si } n > 0, n \text{ impar.} \end{cases}$$

De donde

$$g(z) = \pi i + 2z + 2\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^5}{5} + \cdots$$

d) Hallar el radio de convergencia del siguiente desarrollo, justificando su respuesta:

$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots$$

La serie converge para $|z| < 1$ pues la función $g(z)$ es holomorfa y está definida en $|z| < 1$. Para ver que el radio es exactamente 1, basta ver que no converge para $z = 1$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

es divergente, pues si sumara S, entonces $S + 2S = 3S$ sería la suma de la serie armónica, que sabemos no es convergente.