Primer parcial de Funciones de Variable Compleja.

Mayo de 2011.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

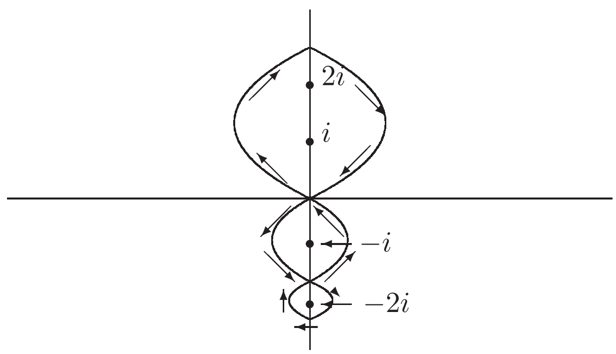
Nota: Cada parte vale 5 puntos, con un máximo de 40. La duración del parcial es de 3 horas.

1. *a*) Encontrar una transformación de Moebius $w = f(z)$ que lleve el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ en el círculo $\{w \in \mathbb{C} : |w - i| < 1\}$.

   b) Sea $f(z)$ la transformación de Moebius dada como respuesta de la parte a). Demostrar que si un complejo z satisface la siguiente ecuación: $(f(z) - i)^{123} = 1$, entonces necesariamente $Im(z) = 0$.

   c) Demostrar que toda transformación $w = f(z)$ holomorfa en un conjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, y tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, es conforme.

2. Sea $f(z) = \dfrac{12}{(z^2+1)(z^2+4)}$ definida para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 2i. - 2i\}$. Sea γ la curva de la figura



   a) Calcular $I = \int_\gamma f(z)\, dz$.
   Sugerencia: Descomponer $f(z)$ en fracciones simples: $f(z) = A/(z-a) +$ $B/(z-b) + C/(z-c) + D/(z-d)$, e integrar después usando el teorema del índice.

   b) Encontrar el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$.
   Sugerencia: Usar la descomposición de $f(z)$ en fracciones simples. Recordar que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ si $|z| < 1$, y observar que para todo complejo $a \neq 0$ y para todo $z \neq a$, se cumple $1/(z-a) = (-1/a)(1/(1-(z/a)))$.

   c) Calcular $J = \int_\gamma f'(z)\, dz$.

3. (Teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración.)
   Sea $f(z)$ una función continua para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva diferenciable orientada. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Se considera la siguiente integral: $g(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz$.

   a) Demostrar que $g(w)$ es una función analítica para $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

   b) Demostrar que $g'(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz$.