Soluciones del Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja, Mayo de 2011

Ej.1 a) Toda transformación de Moebius deja invariante la familia de rectas y circunferencias. En particular, basta hallar una transformación que mande al infinito (punto de la compactificación a un punto del plano complejo, es decir la esfera de Riemann) y otros dos puntos de la recta $Im(z) = 0$, en tres puntos distintos de la circunferencia $|w - i| = 1$, y tal que si se recorre el eje real $Im(z) = 0$ de forma que el semiplano que queda a la izquierda sea $Im(z) > 0$, entonces al aplicar la transformación f se recorra la circunferencia $|w - i| = 1$ de forma que la región que quede a su izquierda sea el círculo $|w - i| < 1$. Un ejemplo se obtiene cuando se eligen los puntos $\infty, 0, 1$, en ese orden, de la recta $Im(z) = 0$; se eligen los puntos $0, 2i, -1 + i$, en ese orden, de la circunferencia $|w - i| = 1$; y se imponen las siguientes condiciones: $f(\infty) = 0,\ f(0) = 2i,\ f(1) = -1 + i$. Planteamos $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ y resulta: $a = 0,\ \ b/d = 2i,\ \ b/(c + d) = -1 + i$, de donde $a = 0,\ b = 2id,\ c = [(1 - i)/(-1 + i)]\, d = -d$. Entonces, una respuesta es $f(z) = 2i/(1 - z)$.

Ej.1 b). $(f(z) - i)^{123} = 1 \ \Rightarrow\ |f(z) - i| = 1$, es decir, $f(z)$ pertenece a la circunferencia $|w - i| = 1$. Debido a que f transforma la recta $Im(z) = 0$ unión $\{\infty\}$ exactamente en la circunferencia $|w - i| = 1$, los únicos puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) \in \{|w - i| = 1\}$ son los de la recta $Im(z) = 0$.

Ej.1 c) Ver por ejemplo "*Funciones de Variable Compleja*", E.C.; Capítulo 2, sección 2.2: *Transformaciones conformes*, Teorema 2.2.1, enunciado de partes a) y b) y su demostración, página 24.

Ej.2 a) Descomponiendo f en fracciones simples, se obtiene:

$$f(z) = \frac{12}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{2i}{z + i} - \frac{2i}{z - i} - \frac{i}{z + 2i} + \frac{i}{z - 2i}.$$

Aplicamos ahora el teorema del índice. Contando el número de vueltas que da la curva γ de la figura, alrededor de cada una de los puntos $i, -i, 2i, -2i$, se obtiene:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, \cdot [2i \cdot Ind_\gamma(-i) - 2i \cdot Ind_\gamma(i) - i \cdot Ind_\gamma(-2i) + i \cdot Ind_\gamma(2i)] =$$

$$= 2\pi i\, \cdot [2i \cdot (+1) - 2i \cdot (-1) - i \cdot (-1) + i \cdot (-1)] = -8\pi.$$

Ej.2 b) Usando la sugerencia

$$\frac{1}{z - a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - (z/a)} = -\frac{1}{a} \cdot \left[1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{z}{a}\right)^n + \ldots\right] \ \text{ si } \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \ \ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z - a} = -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \ldots - \frac{z^n}{a^{n+1}} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{a^{n+1}} \cdot z^n \quad \text{si } \ |z| < |a|, \tag{1}$$

es decir $|a|$ es el radio de convergencia de la serie de potencias en la igualdad (1). Mediante la descomposición en fracciones simples de la función $f(z)$, calculada en la parte a), y usando la igualdad (1) en los casos particulares en que $a = -i,\ i,\ -2i,\ 2i$, obtenemos:

$$f(z) = -(2i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(-i)^{n+1}} + (2i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(i)^{n+1}} + (i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(-2i)^{n+1}} - (i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(2i)^{n+1}} \quad \text{si}$$

$|z| < \text{mín}\{|-i|, |i|, |-2i|, |2i|\} = 1$. Observar que la suma de las cuatro series de potencias es convergente donde todas ellas son convergentes. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias de $f(z)$ es el mínimo de los radios de convergencia de las cuatro series que se suman, es decir: $R = 1$. Entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{si } \ |z| < R = 1, \ \text{donde} \quad c_n = \frac{2}{(-i)^n} + \frac{2}{(i)^n} - \frac{1}{2^{n+1}(-i)^n} - \frac{1}{2^{n+1}(i)^n}.$$

Luego: $c_n = 0$ si n es impar y $c_n = \dfrac{4 - \frac{1}{2^{n+1}}}{i^n} = (4 - \dfrac{1}{2^{n+1}}) \ \cdot\ i^n$ si n es par.

Ej.2 c) Por definición de primitiva, la función derivada $f'(z)$ tiene como primitiva a la función $f(z)$ para todo z donde f es derivable, es decir $\ \forall\ z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 2i, -2i\}$. Luego, por la regla de Barrow, y teniendo en cuenta que la curva $\gamma \subset \Omega$ es cerrada, se obtiene $J = \int_\gamma f'(z)\, dz = f(b) - f(a) = 0$, donde $a = b$ son los extremos de la curva γ. Concluimos que $J = 0$.

Ej.3 a) y b) Ver por ejemplo "*Funciones de Variable Compleja*", E.C.; Capítulo 5, sección 5.3: *Construcción de funciones analíticas mediante integración*, Teorema 5.3.1, enunciado y demostración, páginas 53 a 55.