Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja.

15 de mayo de 2010.

Núm. parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 4 puntos, con un máximo de 40. La duración del parcial es de 3 horas.

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ el primer cuadrante: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   a) Considérese fijo $z \in \Omega$. Hallar todos los complejos w tales que $e^w = 3z$. (Expresar en función del complejo z dado, la parte real y la parte imaginaria de todos los w que verifican esa ecuación).

   b) Demostrar que existe una función conforme $w = f(z)$ definida para todo $z \in \Omega$ y tal que $e^{f(z)} - 3z = 0$ para todo $z \in \Omega$.

   c) Hallar una transformación conforme que lleve el primer cuadrante Ω en forma biunívoca a la banda vertical $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

2. *a*) Hallar el desarrollo en serie de potencias centradas en $z_0 = 0$ de la función $1/(z-2)$ y encontrar un disco D_0 abierto donde la serie sea convergente.

   b) Hallar el desarrollo en serie de potencias centradas en $z_1 = 2$ de la función $1/z$ y encontrar un disco D_1 abierto donde la serie sea convergente.

   c) Demostrar que $f(z) = 2(z-i)/(z(z-2))$ es analítica en el abierto $\Omega = D_0 \cap D_1$. (Sugerencia: Escribir $f(z) = (a/z) \ + \ b/(z-2)$, donde $a, b \in \mathbb{C}$.)

   d) Sea γ una curva cerrada simple que no pasa por los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = 2$, y da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de ambos. Calcular

$$\int_\gamma \frac{2(z-i)}{z(z-2)}\, dz.$$

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $z_0 \in \Omega$. Sea R un rectángulo (incluyendo su borde ∂R y su interior $\mathrm{int}(R)$) contenido en Ω.

   a) Enunciar el teorema de Cauchy-Goursat local en el rectángulo R para funciones $g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$.

   b) Demostrar el teorema de Cauchy-Goursat enunciado en la parte a). (Podrá usarse sin demostración el teorema de Cauchy local en el rectángulo R para funciones $f \in H(\Omega)$.)

   c) Demostrar que si $z_1, z_2, \ldots, z_k$ son k puntos diferentes contenidos en el interior de R, si $g \in H(\Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\})$ y

$$\text{si } \lim_{z \to z_i} g(z)(z - z_i) = 0 \ \forall \ i = 1, 2 \ldots, k, \quad \text{entonces } \int_{\partial R} g(z)\, dz = 0.$$

   Sugerencia: Descomponer el rectángulo R como unión de una cantidad finita de subrectángulos tales que cada uno de ellos contenga en su interior uno o ninguno de los puntos $z_1, \ldots, z_k$. Después aplicar el teorema de Cauchy-Goursat de la parte a) o el teorema de Cauchy local, según corresponda, a cada uno de esos subrectángulos.