Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja.
Soluciones.

15 de mayo de 2010.

Ejercicio 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ el primer cuadrante: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Parte a) Considérese fijo $z \in \Omega$. Hallar todos los complejos w tales que $e^w = 3z$.

Solución: $w = \log 3 + \log |z| + i(2k\pi + \mathrm{Arg}_{(0,\pi/2)}z)$, donde $k \in \mathrm{Z}$ cualquiera, y log denota el logaritmo real.

Parte b) Demostrar que existe una función conforme $w = f(z)$ definida para todo $z \in \Omega$ y tal que $e^{f(z)} - 3z = 0$ para todo $z \in \Omega$. Solución: Para hallar $f(z)$ basta elegir $f(z) = w$ que sea una de las soluciones de la ecuación de la parte a). Sea por ejemplo

$$f(z) = \log 3 + \log |z| + i(\mathrm{Arg}_{(0,\pi/2)}z).$$

Es holomorfa en Ω pues

$$\forall \ z \in \Omega \ \ f(z) = \log 3 + \mathrm{Log}_{(-\pi,\pi)}(z),$$

donde

$$\mathrm{Log}_{(-\pi,\pi)}(\widehat{z}) = \log |\widehat{z}| + i(\mathrm{Arg}_{(-\pi,\pi)}\widehat{z})$$

es el logaritmo complejo holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$. Entonces,

$$\forall \ z \in \ \Omega : \ f'(z) = (\mathrm{Log}_{(-\pi,\pi)}z)' = 1/z \ \Rightarrow \ f'(z) \neq 0.$$

Como toda función holomorfa con derivada no nula es conforme, $f(z)$ es conforme.

Parte c) Hallar una transformación conforme que lleve el primer cuadrante Ω en forma biunívoca a la banda vertical $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

Solución: La función $f(z)$ de la parte b) es una transformación conforme, con dominio Ω. Hallemos su imagen:

$$w = f(z) \ \Leftrightarrow \ \ \mathrm{Re}(w) \in (-\infty, +\infty), \ \mathrm{Im}(w) \in (0, \pi/2).$$

Luego

$$\mathrm{Imagen}(f) = \{w \in \mathbb{C} : \ 0 < \mathrm{Im}(w) < 1\} = B.$$

$f(z)$ es una transformación conforme que lleva Ω en la banda horizontal B. Elijo una transformación conforme $g(w)$ que lleve la banda horizontal B en la banda vertical A, por ej. una rotación de centro 0 y ángulo $-\pi/2$ (multiplicar por $-i$) compuesta con una homotecia de razón $1/(\pi/2)$:

$$g(w) = -(\pi/2)iw \ \Rightarrow \ \ h(z) = g \circ f(z) = -(\pi/2)i[\log 3 \log |z| + i(\mathrm{Arg}_{-\pi/2,\pi/2}z)].$$

$h : \Omega \mapsto A$ es conforme pues f y g lo son. Falta probar que $h : \Omega \mapsto A$ es biunívoca. La rotohomotecia $g : B \mapsto A$ es biunívoca, pues cualquier rotación y cualquier homotecia lo son. Basta probar que $f : \Omega \mapsto B$ es biunívoca. Cualquier transformación es sobreyectiva sobre su imagen. Solo hay que probar entonces que f es inyectiva. Sean z_1 y z_2 en Ω tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Hay que probar que $z_1 = z_2$. Siendo $f(z_1) = f(z_2)$, entonces $e^{f(z_1)} = e^{f(z_2)}$. Como $f(z)$ verifica la ecuación $e^{f(z)} = 3z$, deducimos que $3z_1 = 3z_2$. Luego $z_1 = z_2$.

Ejercicio 2. Parte a) Hallar el desarrollo en serie de potencias centradas en $z_0 = 0$ de la función $1/(z-2)$ y encontrar un disco D_0 abierto donde la serie sea convergente. Solución:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1/2}{(z/2) - 1} = \frac{-1/2}{1 - (z/2)}.$$

La serie geométrica $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ es convergente para $|w| < 1$. Luego $1/(1-(z/2)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/2^n$ es convergente para $|z/2| < 1$, es decir para $|z| < 2$. Juntando con la igualdad anterior:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{2^{n+1}} \text{ convergente } \forall\ z \in D_0 = \{|z| < 2\}.$$

Parte b) Hallar el desarrollo en serie de potencias centradas en $z_1 = 2$ de la función $1/z$ y encontrar un disco D_1 abierto donde la serie sea convergente. Solución: De la parte a) usando $-z'$ en lugar de z, y luego llamando $w = z' + 2$, es decir $z' = w - 2$ resulta:

$$\frac{1}{-z'-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-z')^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z')^n}{2^{n+1}} \text{ convergente } \forall\ z' \in D_0 = \{|z'| = |-z'| < 2\}$$

$$\frac{1}{w} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(w-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(w-2)^n}{2^{n+1}} \text{ convergente } \forall\ w \in D_1 = \{w : |w-2| = |z'| < 2\}.$$

En esta última serie si se escribe z en lugar de w es el desarrollo de $1/z$ en series de potencias de $z-2$, es decir centradas en $z_1 = 2$, convergente en el disco $D_1 = \{|z-2| < 2\}$.

Parte c) Demostrar que $f(z) = 2(z-i)/(z(z-2))$ es analítica en el abierto $\Omega = D_0 \cap D_1$. Solución:

$$\frac{2(z-i)}{z(z-2)} = \frac{i}{z} + \frac{2-i}{z-2}$$

La primera función i/z es analítica en D_0 (igual a la suma de una serie de potencias) por lo demostrado en la parte a) y la segunda función es analítica en D_1 (igual a la suma de una serie de potencias) por lo demostrado en la parte b). Luego, la suma es analítica en $D_0 \cap D_1$ (donde ambos sumandos son analíticos). Otra forma: $f(z)$ es el cociente en Ω de dos polinomios (que son funciones holomorfas en todo $\mathbb{C}$), siendo que el polinomio divisor no se anula para ningún punto de Ω. Entonces el cociente $f(z)$ es una función holomorfa en Ω. Sabiendo que toda función holomorfa en un abierto Ω es analítica, entonces $f(z)$ es analítica en Ω.

Parte d) Sea γ una curva cerrada simple que no pasa por los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = 2$, y da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de ambos. Calcular

$$\int_\gamma \frac{2(z-i)}{z(z-2)}\, dz.$$

Solución: Aplicando al final la fórmula integral de Cauchy global para funciones analíticas:

$$\int_\gamma \frac{2(z-i)}{z(z-2)}\, dz = \int_\gamma \frac{i}{z}\, dz + \int_\gamma \frac{2-i}{z-2}\, dz = 2\pi i \ \mathrm{Ind}_\gamma(0)\ (i)\ + 2\pi i\ \mathrm{Ind}_\gamma(2)\ (2-i)\ = 4\pi i.$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $z_0 \in \Omega$. Sea R un rectángulo contenido en Ω.

Parte a) Enunciar el teorema de Cauchy-Goursat local en el rectángulo R para funciones $g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Hipótesis: Ω abierto, $R \subset \Omega$, $z_0 \in \mathrm{int}(R) \subset \Omega$, $g \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ tal que $\lim_{z\to z_0} g(z)(z-z_0) = 0$. Tesis: $\int_{\partial R} g(z) = 0$.

Parte b) Demostrar el teorema de Cauchy-Goursat enunciado en la parte a).

Demostración: Por hipótesis dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |g(z)(z-z_0)| < \epsilon$$

Ir haciendo una figura para acompañar esta demostración. Dibújese el rectángulo dado R y el punto dado $z_0 \in \mathrm{int}(R)$. Considérese un CUADRADO $R_1 \subset \mathrm{int}(R_0)$ tal que $z_0 \in \mathrm{int}(R_1)$ sea el CENTRO de R_1, y tal que la diagonal de R_1 tenga longitud menor que δ. Constrúyanse arriba, abajo, a la derecha y a la izquierda de R_1, pero dentro de R_0 cuatro rectángulos R_2, R_3, R_4, R_5 tales que la unión $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5 = R$, y tales que el cuadrado y los rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_5$ tienen interiores disjuntos dos a dos. Entonces sus bordes, orientados en sentido antihorario, verifican:

$$\partial R = \partial R_1 + \partial R_2 + \partial R_3 + \partial R_4 + \partial R_5.$$

El rectángulo $R_2 \subset \Omega \setminus \{z_0\}$, donde g es holomorfa (porque z_0 está en el exterior de R_2). Aplicando el teorema de Cauchy local en rectángulos para funciones holomorfas (pues se verifican sus hipótesis con $g \in H(\Omega')$ donde $\Omega' = \Omega \setminus \{z_0\}$ y $R_2 \subset \Omega'$), se deduce que $\int_{\partial R_2} g(z)\, dz = 0$. Análogamente para R_3, R_4 y R_5. Luego:

$$I = \int_{\partial R} g(z)\, dz = \sum_{i=1}^{5} \int_{\partial R_i} g(z)\, dz = \int_{\partial R_1} g(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |I| \leq \int_{\partial R_1} |g(z)|\, |dz| = \int_{\partial R_1} \frac{|g(z)(z - z_0)|}{|z - z_0|}\, |dz|$$

Cuando $z \in \partial R_1$, siendo z_0 el centro del cuadrado R_1:

$$|z - z_0| \leq \frac{\text{diagonal}(R_1)}{2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(z)(z - z_0)| < \epsilon$$

$$|z - z_0| \geq \frac{\text{lado}(R_1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{2}{\text{lado}(R_1)} \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq |I| \leq \int_{\partial R_1} \frac{|g(z)(z - z_0)|}{|z - z_0|}\, |dz| \leq \epsilon \int_{\partial R_1} \frac{2}{\text{lado}(R_1)}\, |dz| \leq \epsilon\, \frac{2}{\text{lado}(R_1)}\, \text{longitud}(\partial R_1)$$

La longitud de la curva borde ∂R_1 es el perímetro de R_1 que es cuatro veces la longitud de su lado (porque R_1 es un cuadrado). Luego

$$0 \leq |I| \leq \epsilon\, \frac{2}{\text{lado}(R_1)}\, 4 \text{ lado}(R_1) = 8\epsilon$$

$$0 \leq |I| \leq 8\epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\Rightarrow\; (\text{haciendo } \epsilon \to 0^+) |I| = 0 \;\Rightarrow\; I = 0.$$

Parte c) Demostrar que si $z_1, z_2, \dots, z_k$ son k puntos diferentes contenidos en el interior de R, si $g \in H(\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\})$ y si $\lim_{z \to z_i} g(z)(z - z_i) = 0 \;\; \forall\, i = 1, 2 \dots, k$, entonces $\int_{\partial R} g(z)\, dz = 0$.

Demostración: Ir haciendo una figura para seguir esta demostración. Dibujar el rectángulo dado R con la cantidad finita (por ejemplo siete) de puntos dados $z_1, \dots, z_k$ en su interior. Partimos el rectángulo R como unión de una cantidad finita de subrectángulos $R_1, R_2, \dots, R_h$, con interiores dos a dos disjuntos, tales que cada uno de ellos contenga en su interior uno solo o ninguno de los puntos $z_1, \dots, z_k$, y cuyos bordes no contengan a ninguno de esos puntos. Orientando los bordes ∂R_i de los rectángulos en sentido antihorario, obtenemos:

$$\int_{\partial R} g(z)\, dz = \sum_{i=1}^{h} \int_{\partial R_i} g(z)\, dz$$

Elijamos y dejemos fijo uno de los subrectángulos R_i. Hay dos casos posibles para ese subrectángulo R_i: o bien algún punto z_j y uno solo, entre los puntos $z_1, \dots, z_k$ cumple $z_j \in \text{int}(R_i)$, o bien todos esos puntos están en el exterior de R_i. En el primer caso, aplicando el teorema de Cauchy-Goursat de la parte a) se obtiene $\int_{\partial R_i} g(z)\, dz = 0$. En el segundo caso podemos aplicar el teorema de Cauchy local para deducir lo mismo: $\int_{\partial R_i} g(z) = 0$. (Se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy local en rectángulos para funciones holomorfas, pues como todos los puntos $z_1, \dots, z_k$ están en el exterior de R_i entonces $R_i \subset \Omega' = \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$, y además sabemos que $g \in H(\Omega')$.) En conclusión

$$\int_{\partial R_i} g(z)\, dz = 0 \;\forall\, i = 1, \dots, h \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\partial R} g(z)\, dz = \sum_{i=1}^{h} \int_{\partial R_i} g(z)\, dz = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0.$$