Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Funciones de Variable Compleja

30 de abril de 2009

SOLUCIONES DEL PRIMER PARCIAL

I. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **analítica** cuando para cada punto $z_0 \in \Omega$ existe $r_0 > 0$ y una sucesión de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$ tales que $D(z_0, r_0) \subset \Omega$ y para todo $z \in D(z_0, r_0)$ vale que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

Diremos que $z_0 \in \Omega$ es un **cero aislado** de f cuando existe un entorno de z_0 tal que en ese entorno f sólo se anula en z_0. Observar que si $k \geq 1$ entonces z_0 es un cero aislado de $(z - z_0)^k$.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Demostrar que si $f(z_0) = 0$ entonces, o bien z_0 es un cero aisaldo de f, o bien $f(z) = 0$ para todo z en cierto entorno de z_0.
2. Probar que los siguientes conjuntos son abiertos:
$$\Omega_1 = \{z_0 \in \Omega \mid f(z) = 0 \text{ para todo } z \text{ en un entorno de } z_0\},$$
$$\Omega_2 = \{z_0 \in \Omega \mid f(z) \neq 0 \text{ para todo } z \neq z_0 \text{ en un entorno de } z_0\} \, .$$
3. Deducir que si Ω es conexo entonces o bien $f = 0$ o bien todos los ceros de f son aislados.
4. Mostrar que si f y g son dos funciones analíticas definidas en una región Ω, y coinciden en un conjunto con un punto de acumulación, entonces $f = g$.
5. Probar que si f, g son analíticas en Ω y $fg = 0$, donde Ω es una región de $\mathbb{C}$, entonces $f = 0$ o $g = 0$.
6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(a_n) = (1 + 1/n)^{-1}$, siendo $a_n = \log(1 + 1/n)$ y donde log indica el logaritmo real. Calcular $f(i\pi/2)$ y justificar dicho cálculo.

I. SOLUCIÓN

1. Supongamos que f es no es la función nula en un entorno de z_0. Afirmamos que entonces existe al menos un elemento de la sucesión de números complejos $(a_n)_{n\geq 0}$ que es no nulo. En efecto, si $a_n = 0 \ \forall n$,
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 (z - z_0)^n = 0,$$
en todo el entorno donde vale el desarrollo en serie de potencias, lo que contradice nuestra suposición inicial sobre f.

   Observar que siempre $a_0 = f(z_0) = 0$.

   Entonces, podemos definir $k = \min\{n > 0 : a_n \neq 0\} < +\infty$. Todos los términos anteriores a a_k son cero, por tanto ahora f se escribe como:
$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i+k} (z - z_0)^{i+k} = (z - z_0)^k \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i+k} (z - z_0)^i = (z - z_0)^k \phi(z) \, ,$$

siendo $\phi(z)$ una función analítica en un entorno de z_0. En particular ϕ es continua, y $\phi(z_0) = a_k$, por lo que existe un entorno U_{z_0} donde ϕ no se anula.

En ese entorno U_{z_0}, $f(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$, y sólo se puede anular donde se anula el primer factor, y este sólo lo hace en z_0. Entonces z_0 es un cero aislado de f.

2. Veamos que Ω_1 es abierto. Sea $z_0 \in \Omega_1$, tenemos que probar que existe un entorno de z_0 que está todo contenido dentro de Ω_1.

   Como $z_0 \in \Omega_1$ existe un entorno de él, tal que $f(z) = 0$ en todo punto z de ese entorno. No hay inconveniente en suponer que este entorno es un disco, por tanto, existe $r > 0$, tal que si $z \in D(z_0, r)$ se cumple $f(z) = 0$. Afirmo que $D(z_0, r/2)$ está contenido en Ω_1.

   En efecto: si $\omega \in D(z_0, r/2)$, se tiene que

   $$D(\omega, r/2) \subset D(z_0, r) \text{ y por tanto } f \text{ es cero en } D(\omega, r/2) \text{ y } \omega \in \Omega_1.$$

   Para Ω_2: Si $z_0 \in \Omega_2$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ siempre que $0 < |z - z_0| < r$. Por otra parte, dado que f es continua, es claro que si $f(z) \neq 0$ entonces $z \in \Omega_2$. Por lo tanto $D(z_0, r) \subset \Omega_2$.

3. Ω_1, Ω_2 son abiertos y disjuntos (por su propia definición), veamos que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. En efecto, si tomamos $z \in \Omega$ se tiene que sucede alguna de las siguientes dos opciones:

   - Si $f(z) \neq 0$, entonces como f es analítica es continua, y $z \in \Omega_2$.
   - Si $f(z) = 0$, entonces por la parte uno hay dos posibilidades. La primera es que z sea un cero aislado, y en ese caso $z \in \Omega_2$. La segunda es que f sea nula en un entorno de z, y por tanto en este segundo caso $z \in \Omega_1$.

   Concluimos utilizando el hecho que Ω es conexo. Es decir, debe ser $\Omega = \Omega_1$, en cuyo caso $f = 0$, o bien $\Omega = \Omega_2$ y en este caso todos los ceros de f son aislados.

4. Definimos la función auxiliar $h = f - g$, que también es analítica. Cada vez que f y g coinciden h tiene un cero, como lo hacen en un conjunto con un punto de acumulación, h tiene un cero que no es aislado. Como Ω es conexo (y las funciones están definidas en Ω), se tiene que $h = 0$, y por tanto $f = g$.

5. Supongamos que f no es idénticamente nula. Existe entonces $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$. La continuidad implica que f no se anula en un entorno de z_0. Pero entonces g debe anularse en todo punto de ese entorno. Por lo probado anteriormente, g es la función nula en Ω.

6. Por las partes anteriores basta con encontrar una función analítica g que coincida con la función f en la sucesión dada, pues está tiene un punto de acumulación (es convergente). Si tomamos $g(z) = e^{-z}$ vemos que f y g coinciden en la sucesión. Sólo resta argumentar que g es analítica.

   $$g(z) = e^{-z_0}\, e^{z_0 - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, e^{-z_0}}{n!}\, (z - z_0)^n\,,$$

   y el radio de convergencia de esta serie es $R = +\infty$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

II. Calcular las siguientes integrales:

1. $$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz$$

2. $$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$

II. SOLUCIÓN

La fórmula de Cauchy que vimos en el curso nos dice que si f es una función holomorfa en un disco que contiene a la curva cerrada γ se tiene que:

$$f(a)\, ind_a(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,, \text{ para todo } a \text{ en el dominio de } f.$$

El ejercicio consiste en aplicar la fórmula de Cauchy adecuadamente.

1. Para el primer caso se debe tomar $f(z) = e^z$, y entonces:

$$\int_{\gamma:|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz \;= (2\pi i)\, f(0)\, ind_0(\gamma : |z| = 1) = 2\pi i$$

2. Para el segundo caso se debe agregar (por ejemplo) el segmento $[-2, 2]$ a la curva, orientándole de forma coherente para que no altere la integral. La nueva curva definida γ' consta de dos semicircunferencias, γ_1 (que encierra a i) y γ_2 (que encierra a $-i$). En definitiva:

$$\int_{\gamma:|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\, dz \;= \int_{\gamma'} \frac{1}{z^2+1}\, dz\,,$$

luego, separando las integrales y factorizando el denominador:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z+i)(z-i)}\, dz \;= (2\pi i)\left[\frac{1}{2i} ind_i(\gamma_1) + \frac{1}{-2i} ind_{-i}(\gamma_2)\right] = 0.$$

III. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua entonces

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\, f(t)|\ dt\,.$$

III. SOLUCIÓN

Llamemos $I = \int_a^b f(t)\, dt$. Si $I = 0$ la desigualdad es inmediata, porque el integrando del lado derecho es no negativo.

Si $I \neq 0$, escribamos $I = |I|e^{i\theta}$ donde θ es una constante real, argumento de I. Resulta que:

$$|I| = Ie^{-i\theta} = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\, dt.$$

Llamando $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$ se tiene

$$|I| = \int_a^b g(t)\, dt = \int_a^b Re(g(t))\, dt + i \int_a^b Im(g(t))\, dt,$$

pero $|I|$ es un número real, por tanto $\int_a^b Im(g(t))\, dt = 0$.

En resumen $|I| = \int_a^b Re(g(t))\, dt$. Resta utilizar que para cualquier complejo u se tiene que $Re(u) \leq |u|$. Finalmente:

$$|I| = \int_a^b Re(g(t))\, dt \leq \int_a^b |g(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$