Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja.

7 de mayo de 2007.

Núm. parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	Total

- El parcial consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 11 partes de ejercicios en total. Cada parte vale 4 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 44 puntos. No hay puntajes negativos.
- La duración del parcial es de 3 horas. Durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. *a*) Sea $f(z) = e^{\pi\, i\, z}$. Encontrar y dibujar la imagen por f de la banda vertical

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \; 0 < Re(z) < 1\}.$$

b) Hallar la transformación de Moebius $w = g(z)$ tal que

$$g(-1) = 2, \quad g(0) = 2i, \quad g(1) = -2.$$

c) Encontrar y dibujar el conjunto preimagen por g del disco $D = \{w \in \mathbb{C} : \; |w| < 2\}$.

d) Deducir que la transformación compuesta

$$g \circ f$$

lleva conformemente la banda B al disco D.

2. Sea γ la semicircunferencia parametrizada por $z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$, orientada para t creciente, y sea γ^* su conjunto recorrido en el plano complejo $\mathbb{C}$.

   Sea G la función analítica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definida mediante la integral siguiente:

$$G(z_0) = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \qquad \forall\, z_0 \notin \gamma^*.$$

   a) Calcular $G(0)$.

   b)

$$\int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}}\, dz.$$

   c) Hallar el desarrollo en serie de potencias de $G(z)$ centrado en $z_0 = 0$. (Sugerencia: recordar la fórmula de la derivada $n-$ésima en el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración.)

   d) Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias de la parte anterior.

3. Sea la semirrecta $S = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) = Re(z) \geq 1\}$. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ y sea $f \in H(\Omega)$ tal que

$$Re(f(z)) = u(x, y) = L((x-1)^2 + (y-1)^2) \text{ para todo } z \in \Omega,$$

   donde $x = Re(z), \ y = Im(z), \qquad$ y L indica el logaritmo neperiano real de los reales positivos.

   a) Enunciar y aplicar algún teorema que permita asegurar la existencia de una función $f \in H(\Omega)$ que cumpla lo anterior.
   (Nota: No se pide encontrar la función f.)

   b) Demostrar que

$$f'(z) = \frac{2}{z - 1 - i}.$$

   c) Calcular

$$\int_\gamma f'(z)\, dz$$

   a lo largo de cualquier camino γ en el plano complejo que no interseque a la semirrecta S y que una el punto i con el punto $i - 1$. (Sugerencia: usar la regla de Barrow.)