Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja. Soluciones.

7 de mayo de 2007.

Ejercicio 1. Parte a) Sea $f(z) = e^{\pi\, i\, z}$. Encontrar y dibujar la imagen por f de la banda vertical

$$B = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < Re(z) < 1\}.$$

Solución: $z = x + iy, \ \ 0 < x < 1$
$f(z) = e^{\pi(ix-y)} = e^{-\pi\, y}(\cos(\pi x) + i \operatorname{sen}(\pi x) \ \ \Rightarrow$
$|f(z)| = e^{\pi\, y}, \ y \in \mathbb{R}, \ arg(f(z)) = \pi x, \ 0 < x < 1$
$|f(z)| > 0$ cualquiera, $\ 0 < \arg(f(z)) < \pi$
Luego $f(z)$ varía en el semiplano superior al eje de las x.
La imagen de B por f es el semiplano $S = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\}$.

Parte b) Hallar la transformación de Moebius $w = g(z)$ tal que $g(-1) = 2, \ \ g(0) = 2i, \ \ g(1) = -2$.

Solución:

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ g(-1) = 2 \Rightarrow \frac{b-a}{d-c} = 2, \ \ g(0) = 2i \Rightarrow \frac{b}{d} = 2i.$$

Entonces $d \neq 0$. Se puede elegir libremente uno de los cuatro coeficientes, con tal que no sea cero. Elijo $d = -1$. Queda $b = -2i, \ (a+2i)/(c+1) = 2 \quad (1)$.

$g(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-2i}{c-1} = -2 \qquad (2)$. Juntando (1) y (2), encuentro $c = i, \ \ a = 2$. Por lo tanto resulta:

$$w = g(z) = \frac{2z - 2i}{iz - 1}$$

Parte c) Encontrar y dibujar el conjunto preimagen por g del disco $D = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| < 2\}$.

Solución: La transformación de Moebius g lleva la recta o circunferencia que pasa por los tres puntos $-1, 0, +1$ (es una recta r porque están alineados), a la recta o circunferencia que pasa por los tres puntos respectivas imágenes de los anteriores: $2, 2i - 2$, (es una circunferencia c porque no están alineados); respetando el orden y la orientación. Por lo tanto, al recorrer esos tres puntos en el orden dado, g lleva el semiplano a la izquierda de la recta r a la región que queda a la izquierda de la circunferencia c. Luego lleva el semiplano $S = \{Im(z) > 0\}$ al disco D. Luego como g es biyectiva (por ser de Moebius) la preimagen por g del disco D es el semiplano S.

Parte d) Deducir que la transformación compuesta

$$g \circ f$$

lleva conformemente la banda B al disco D.

Solución: Juntando la parte a) con la parte c) se deduce que $g \circ f$ lleva B a D (porque primero f lleva B a S, y luego g lleva S a D). Como f es la exponencial que tiene derivada no nula, es conforme. Como g es una transformación de Moebius, es conforme. Entonces la composición $g \circ f$ es conforme, y lleva B a D como queríamos demostrar.

Ejercicio 2. Sea γ la semicircunferencia parametrizada por $z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$, orientada para t creciente, y sea γ^* su conjunto recorrido en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Sea G la función analítica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ definida mediante la integral siguiente:

$$G(z_0) = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \qquad \forall\, z_0 \notin \gamma^*.$$

Parte a) Calcular $G(0)$.

Solución:

$$G(0) = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{\dot z(t)}{z(t)}\, dt = \int_0^\pi \frac{2ie^{it}}{2e^{it}}\, dt = i \int_0^\pi dt = \pi\, i.$$

Parte b) Si $n \ge 1$, calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}}\, dz$.
Solución:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}} = \int_0^\pi \frac{\dot z(t)}{(z(t))^{n+1}}\, dt = \int_0^\pi \frac{2ie^{it}}{2^{n+1}e^{int}e^{it}}\, dt = \frac{i}{2^n}\int_0^\pi e^{-int}dt = \frac{1}{n2^n}(1 - e^{-i\pi}) = \frac{1-(-1)^n}{n2^n}.$$

Parte c) Hallar el desarrollo en serie de potencias de $G(z)$ centrado en $z_0 = 0$. (Sugerencia: recordar la fórmula de la derivada $n-$ésima en el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración.)

Solución: Por el teorema de construcción de funciones analíticas mediante integración, la función $G(z_0) = \int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz$ es analítica como función de z_0 en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y su derivada $n-$ésima es

$$G^{(n)}(z_0) = n! \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

En particular para $z_0 = 0$, resulta:

$$G^{(n)}(0) = n! \int_\gamma \frac{1}{z^{n+1}}\, dz = \frac{n!\,(1-(-1)^n)}{n2^n} \qquad (3)$$

Como en toda función analítica, el desarrollo en serie de potencias de $G(z)$ alrededor de $z_0 = 0$ es una serie $G(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, donde $a_n = G^{(n)}(0)/n!$. Luego, usando la parte a) y el resultado de la igualdad (3), resulta: $a_0 = G(0) = \pi i, \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n2^n}$ si $n \ge 1$. En definitiva:

$$G(z) = \pi i + \sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{n2^n} z^n.$$

Parte d) Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias de la parte anterior.

Solución: La función analítica $G(z)$ lo es para $z \notin \gamma^*$. Luego, el radio de convergencia de su desarrollo en serie de potencias de z (centrado en $z_0 = 0$) es igual a la distancia de 0 a la curva γ^*, que es 2.

También puede hallarse el radio de convergencia $R = 2$ con la fórmula de la raíz $n-$ésima: $R = 1/\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Ejercicio 3. Sea la semirrecta $S = \{z \in \mathbb{C} : \; Im(z) = Re(z) \geq 1\}$. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ y sea $f \in H(\Omega)$ tal que

$$Re(f(z)) = u(x,y) = L((x-1)^2 + (y-1)^2) \text{ para todo } z \in \Omega,$$

donde $x = Re(z),\ y = Im(z)$, y L indica el logaritmo neperiano real de los reales positivos.

Parte a) Enunciar y aplicar algún teorema que permita asegurar la existencia de una función $f \in H(\Omega)$ que cumpla lo anterior.

(Nota: No se pide encontrar la función f.)

Solución: Teorema: Si u es una función real armónica en el abierto Ω, y Ω es simplemente conexo, entonces existe (en general no es única) una función $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$.

Observemos que Ω es simplemente conexo (por ejemplo podemos ver que es estrellado), por lo que para aplicar el teorema anterior basta verificar que u es armónica. En efecto

$$u_x = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad u_y = \frac{2(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Luego, derivando una vez más, se obtiene:

$$u_{xx} = \frac{2(y-1)^2 - 2(x-1)^2}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{2(x-1)^2 - 2(y-1)^2}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^2}$$

Entonces $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ \forall\, (x,y) \neq (1,1)$, en particular para todo (x,y) tal que $x + iy \in \Omega$.

Parte b) Demostrar que

$$f'(z) = \frac{2}{z-1-i}.$$

Solución: Para toda función holomorfa f con parte real u, se tiene la fórmula para la derivada $f'(z) = u_x - iu_y$. Luego:

$$f'(z) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \ - \ i\,\frac{2(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} =$$

$$= \frac{2(x - iy - 1 + i)}{|(x-1) + i(y-1)|^2} = \frac{2(\overline{z} - 1 + i)}{|z-1-i|^2} = \frac{2(\overline{z} - 1 + i)}{(z-1-i)(\overline{z} - 1 + i)} = \frac{2}{z-1-i}$$

Parte c) Calcular $\int_\gamma f'(z)\,dz$ a lo largo de cualquier camino γ en el plano complejo que no interseque a la semirrecta S y que una el punto i con el punto $i-1$. (Sugerencia: usar la regla de Barrow.)

Solución:

$$I = \int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\gamma \frac{2}{z-1-i}\,dz \qquad (4)$$

Una primitiva en $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ de $1/(z-1-i)$ es $\log_{(\pi/4\,,\,9\pi/4)}(z-1-i)$.

Usando esta primitiva y aplicando la regla de Barrow para calcular la integral (4), resulta:

$$I = 2\log_{(\pi/4\,,\,9\pi/4)}(z-1-i)\Big|_{z=i}^{z=i-1} =$$

$$= 2\log_{(\pi/4\,,\,9\pi/4)}(-2) - 2\log_{(\pi/4\,,\,9\pi/4)}(-1) = 2L2 + 2\pi i - (2L1 - 2\pi i) = 2L2.$$