Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja.

13 de mayo de 2006.

Núm. parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	Total

- El parcial consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 10 partes de ejercicios en total. Cada parte vale 4 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 40 puntos. No hay puntajes negativos.
- La duración del parcial es de 3 horas. Durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

   a) Encontrar $u(x,y) = Re(\cosh z)$, $\quad v(x,y) = Im(\cosh z)$ donde $x = Re\, z,\ y = Im\, z$.

   b) Encontrar y dibujar la imagen por cosh de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:
   - El eje imaginario $x = 0$.
   - La recta vertical $x = a$ con $a \neq 0$. (Se recuerda que una elipse de semiejes $A > 0$ y $B > 0$ paralelos a los ejes coordenados tiene por ecuación $(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$).
   - El semiplano abierto $\{x > 0\}$.

   c) Demostrar que para todo $w \in \mathbb{C}$ existen infinitos complejos z tales que $\cosh z = w$.

2. En lo que sigue x, y, u, v, U, V son reales, y $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sean

$$g(z) = U(x,y) + iV(x,y), \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

funciones definidas para todo $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (También llamamos $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.)

a) Probar que si $f(z) = \overline{g(i\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega$, entonces

$$u(x,y) = U(y,x), \quad v(x,y) = -V(y,x)$$

Demostrar que $f \in H(\Omega)$ si y solo si $g \in H(\Omega)$.

b) Probar que la siguiente función u es armónica en Ω:

$$u(x,y) = \frac{2x + 4y}{x^2 + y^2}$$

Sugerencia: Considerar $g(z) = (4 + 2i)/z$ y usar la parte a).

c) Hallar si existe, o probar que no existe, armónica conjugada en Ω de la función $u(x,y)$ de la parte b).

d) Hallar si existe, o probar que no existe, una función compleja $F(z)$ holomorfa en Ω tal que la parte real de la derivada $F'(z)$ coincida en Ω con la función $u(x,y)$ de la parte b).

3. Sean $a \neq b$ dos complejos y sea γ la curva:

$$\gamma(t) = \begin{cases} a + (b-a)e^{it}/2 & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ b - (b-a)e^{-it}/2 & \text{si} \quad t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

a) Dibujar γ, indicando la orientación para t creciente, cuando $a = 1 + i$, $b = 1 - i$.

b) Probar que cualesquiera sean fijos los complejos $a \neq b$, se cumple:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{3z + 2 + i}{(z-a)(z-b)} \, dz = \frac{3(a+b) + 4 + 2i}{a - b}$$

Sugerencia: usar la fórmula integral de Cauchy en cada una de las circunferencias que forman γ.

c) Desarrollar en serie de potencias centrada en $w = a$, e indicar su radio de convergencia, a la función

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{3z + 2 + i}{(z-w)(z-b)} \, dz$$