# Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja. Soluciones.

13 de mayo de 2006.

**Ejercicio 1.** Sea

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

**Parte a):** Encontrar $u(x,y) = Re(\cosh z)$, $v(x,y) = Im(\cosh z)$ donde $x = Re\, z$, $y = Im\, z$.
Solución:

$$u(x,y) = \cosh x \cos y, \quad v(x,y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y, \quad \text{donde } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**Parte b):** Encontrar y dibujar la imagen por cosh de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

- El eje imaginario $x = 0$.

  Solución: Es el segmento $[-1, 1]$ contenido en el eje real.

- La recta vertical $x = a$ con $a \neq 0$. (Se recuerda que una elipse de semiejes $A > 0$ y $B > 0$ paralelos a los ejes coordenados tiene por ecuación $(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$).

  Solución: Es la elipse $(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$, centrada en el origen, de semiejes $A = \cosh a \in (1, +\infty)$, y $B = |\operatorname{senh} a| \in (0, +\infty)$.

- El semiplano abierto $\{x > 0\}$.

  Solución: Es la unión de todos los puntos que están en las imágenes de las rectas verticales $x = a$ con $a > 0$. Por lo tanto es la unión de todos los puntos que están en las elipses encontradas en la parte anterior. Estas elipses tienen semiejes $A > 1^+$ y $B > 0^+$ que varían continuamente con $a > 0$, tienden a $A = 1, B = 0$ cuando $a \to 0^+$, y tienden a $+\infty$ cuando $a \to +\infty$. Entonces las elipses, al variar $a > 0$, barren todo el plano excepto el segmento $[-1, 1]$. Luego, la imagen del semiplano abierto $\{x > 0\}$ es $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

**Parte c):** Demostrar que para todo $w \in \mathbb{C}$ existen infinitos complejos $z$ tales que $\cosh z = w$.
Solución: Dado un complejo $w$, distingamos dos casos:
1er. caso: $w \in [-1, 1]$.

Por lo probado en la parte b), $w$ está en la imagen del eje imaginario $x = 0$. Entonces existe algún $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(0 + iy_0) = w$. Si consideramos todos los complejos $z = i(y_0 + 2k\pi)$ con $k$ entero cualquiera, se cumple:

$$f(z) = f(i(y_0 + 2k\pi)) = \cos(y_0 + 2k\pi) = \cos(y_0) = f(iy_0) = w$$

Lo anterior prueba que todos los complejos de la forma $z = i(y_0 + 2k\pi)$ con $k$ entero cualquiera, son preimágenes del mismo punto $w$ dado. Son infinitas preimágenes, una para cada número $k$ entero.

2do. caso: $w \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Por lo probado en la parte b), $w$ está en la imagen del semiplano abierto $\{x > 0\}$. Entonces existe algún $a > 0$ y algún $b \in \mathbb{R}$ tal que $w = f(a + ib)$. Si consideramos todos los complejos $z = a + i(b + 2k\pi)$ con $k$ entero cualquiera, se cumple:

$$f(z) = f(a + i(b + 2k\pi)) = \cosh a \cos(b + 2k\pi) + i \operatorname{senh} a \operatorname{sen}(b + 2k\pi) =$$

$$= \cosh a \cos b + i \operatorname{senh} a \operatorname{sen} b = f(a + ib) = w$$

Lo anterior prueba que todos los complejos de la forma $z = a + i(b + 2k\pi)$ con $k$ entero cualquiera, son preimágenes del mismo punto $w$ dado. Son infinitas preimágenes, una para cada número $k$ entero.

**Ejercicio 2.** En lo que sigue $x, y, u, v, U, V$ son reales, y $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Sean

$$g(z) = U(x, y) + iV(x, y), \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funciones definidas para todo $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (También llamamos $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.)

**Parte a):** Probar que si $f(z) = \overline{g(i\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega$, entonces

$$u(x, y) = U(y, x), \quad v(x, y) = -V(y, x)$$

Demostrar que $f \in H(\Omega)$ si y solo si $g \in H(\Omega)$.

$$z = x + iy \Rightarrow i\overline{z} = i(x - iy) = y + ix$$

$$g(z) = g(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y) \Rightarrow g(i\overline{z}) = g(y + ix) = U(y, x) + iV(y, x) \Rightarrow$$

$$\overline{g(i\overline{z})} = U(y, x) - iV(y, x) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$f(z) = \overline{g(i\overline{z})} \Rightarrow u(x, y) + iv(x, y) = U(y, x) - iV(y, x)$$

Luego

$$u(x, y) = U(y, x), \quad v(x, y) = -V(y, x) \quad (1)$$

Luego $u, v$ son diferenciables si y solo si $U, V$ lo son.

Para trabajar con las ecuaciones de Cauchy Riemann, consideraremos las derivadas parciales sub $x$, respecto a la *primera variable* dentro de las funciones; y sub $y$ respecto a la *segunda variable* dentro de las funciones, *no importa en qué valores estén evaluadas;* por ejemplo las evaluaremos en en $x = a$ e $y = b$ donde $(a, b) \in \Omega$; o en $x = b$ e $y = a$, que es otro punto de $\Omega$.

Por Cauchy-Riemann:

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow u, v \text{ diferenciables y } u_x(a, b) = v_y(a, b),\ u_y(a, b) = -v_x(a, b) \ \ (2)$$

Usando (1) se deduce que

$$u_x(a, b) = U_y(b, a),\ u_y(a, b) = U_x(b, a),\ v_x(a, b) = -V_y(b, a),\ v_y(a, b) = -V_x(b, a) \quad (3)$$

Usando (2) y (3) se obtiene:

$$(2) \Leftrightarrow \ U, V \text{ diferenciables y } U_y(b,a) = -V_x(b,a), \ U_x(b,a) = -(-V_y(b,a)) = V_y(b,a) \quad (4)$$

Por Cauchy-Riemann, la afirmación (4) es equivalente a que $g \in H(\Omega)$.

**Parte b):** Probar que la siguiente función $u$ es armónica en $\Omega$:

$$u(x,y) = \frac{2x+4y}{x^2+y^2}$$

Sugerencia: Considerar $g(z) = (4+2i)/z$ y usar la parte a).

Solución: Sea $f(z) = \overline{ig(\overline{z})}$. Se cumple:

$$f(z) = \frac{4-2i}{\overline{i\overline{z}}} = \frac{4-2i}{-iz} = \frac{2+4i}{z}$$

$$f(z) = \frac{(2+4i)(x-iy)}{z\overline{z}} = \frac{2x+4y+i(4x-2y)}{x^2+y^2}$$

La parte real de $f(z)$ es la función $u(x,y)$ dada. Como la parte real de una función holomorfa es armónica, se deduce que $u$ es armónica.

**Parte c):** Hallar si existe, o probar que no existe, armónica conjugada en $\Omega$ de la función $u(x,y)$ de la parte b).

Solución: La función holomorfa $f(z)$ hallada en la parte anterior tiene como parte real la función $u(x,y)$ dada, y como parte imaginaria la función

$$v(x,y) = \frac{4x-2y}{x^2+y^2} \quad (5)$$

Siendo $f$ holomorfa, su parte imaginaria es armónica conjugada de su parte real. Se deduce entonces que la función $v(x,y)$ definida en la igualdad (5) es armónica conjugada de $u(x,y)$.

**Parte d):** Hallar si existe, o probar que no existe, una función compleja $F(z)$ holomorfa en $\Omega$ tal que la parte real de la derivada $F'(z)$ coincida en $\Omega$ con la función $u(x,y)$ de la parte b).

Solución: Supongamos primero que existe una función $F(z)$ como se pide. Si la podemos encontrar, y verificamos que cumple todo lo pedido, habríamos probado que existe; y si llegamos a un absurdo, habríamos probado que no existe.

$F'(z)$ tiene como parte real $u(x,y)$; entonces la parte real de $F'(z)-f(z)$ es idénticamente nula. (Aquí la función $f(z)$ es la encontrada en la parte a).) La diferencia $F'-f$ es holomorfa porque es diferencia de dos funciones holomofas, y tiene parte real idénticamente nula. Por Cauchy-Riemann, su parte imaginaria es constante igual a $ai$ (donde $a$ es real constante.) Entonces

$$F'(z) = f(z) + ai = \frac{2+4i}{z} + ai \quad (6)$$

De la igualdad anterior se deduce que la función $f(z) = \frac{2+4i}{z}$ tiene una primitiva en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que es $F(z) - aiz$ (primitiva de $F'(z) - ai$). Y esto es absurdo porque la función $2 + 4i/z$ no tiene primitiva en $\Omega$, ya que su integral a lo largo de una curva cerrada contenida en $\Omega$ que de una vuelta alrededor del origen es, por el teorema del índice, $(4+8i)\pi i \neq 0$.

Concluimos entonces que no existe la función $F(z)$ holomorfa en $\Omega$ cuya derivada tenga parte real igual a la función $u(x,y)$ dada en la parte b).

**Ejercicio 3.** Sean $a \neq b$ dos complejos y sea $\gamma$ la curva:

$$\gamma(t) = \begin{cases} a + (b-a)e^{it}/2 & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ b - (b-a)e^{-it}/2 & \text{si} \quad t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

**Parte a):** Dibujar $\gamma$, indicando la orientación para $t$ creciente, cuando $a = 1+i$, $b = 1-i$.

Solución: La curva $\gamma$ es cerrada y tiene forma de "ocho": empieza en el punto 1, y recorre una circunferencia con radio 1 y centro en $1+i$ dando una vuelta en sentido antihorario; después, cuando volvió al punto 1, sigue recorriendo una circunferencia con radio 1 y centro en $1-i$ dando una vuelta en sentido horario, hasta terminar en el punto 1.

**Parte b):** Probar que cualesquiera sean fijos los complejos $a \neq b$, se cumple:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{3z + 2 + i}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{3(a+b) + 4 + 2i}{a-b}$$

Sugerencia: usar la fórmula integral de Cauchy en cada una de las circunferencias que forman $\gamma$.

Solución: Escribamos $\gamma = C_1 - C_2$ donde $C_1$ y $C_2$ son las circunferencias de radio $|a-b|/2$ centradas respectivamente en $a$ y $b$, recorridas una sola vez en sentido antihorario. La integral $I$ de $f(z)$ a lo largo de $\gamma$ es la integral $I_1$ de $f(z)$ a lo largo de $C_1$ menos la integral $I_2$ a lo largo de $C_2$. Calculemos ambas integrales:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(3z+2+i)/(z-b)}{z-a}\, dz = \left. \frac{3z+2+i}{z-b} \right|_{z=a} = \frac{3a+2+i}{a-b}$$

Hemos usado la fórmula integral de Cauchy para la función $g_1(z) = (3z+2+i)/(z-b)$, en la circunferencia $C_1$ que es homotópica a una punto en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ donde la función $g_1$ es analítica, y que cumple $Ind_{C_1}(a) = 1$.

Análogamente:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(3z+2+i)/(z-a)}{z-b}\, dz = \left. \frac{3z+2+i}{z-a} \right|_{z=b} = \frac{3b+2+i}{b-a}$$

Hemos usado la fórmula integral de Cauchy para la función $g_2(z) = (3z+2+i)/(z-a)$, en la circunferencia $C_2$ que es homotópica a un punto en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ donde la función $g_2$ es analítica, y que cumple $Ind_{C_2}(b) = 1$.

Calculando ahora $I$, la integral pedida, recordando que $\gamma = C_1 - C_2$, se obtiene:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{3a+2+i}{a-b} - \frac{3b+2+i}{b-a} = \frac{3(a+b)+4+2i}{a-b}$$

**Parte c):** Desarrollar en serie de potencias centrada en $w = a$, e indicar su radio de convergencia, a la función

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{3z+2+i}{(z-w)(z-b)}\, dz$$

Solución: La función $g \in H(\Omega)$ donde $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Luego, el radio $R$ máximo donde vale la igualdad

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-a)^n \quad \forall w \in D_R(a) \qquad (1)$$

es tal que $D_R(a) \subset \Omega$, es decir

$$R = \text{ dist}\,(a, \gamma^*) = |b-a|/2$$

Este radio $R$ es el máximo donde la serie de potencias que hay que encontrar converge y su suma es igual a $g(w)$. No tiene por qué ser el máximo $R_0$ donde la serie converge (con suma no necesariamente igual a g(w)). Es decir $R \leq R_0$ donde $R_0 = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Cuando encontremos la serie, encontraremos $R_0$.

Busquemos la serie de modo que cumpla (1) para $w \in D_R(a)$. El punto $w$ es interior a la circunferencia $C_1$ de centro en $a$ y radio $|b-a|/2$. De modo que podemos calcular $g(w)$ para todo $w \in D_R(a)$ del mismo modo que calculamos la integral de la parte b):

$$g(w) = I_1 - I_2, \text{ donde:}$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{(3z+2+i)/(z-b)}{z-w}\,dz = \left.\frac{3z+2+i}{z-b}\right|_{z=w} = \frac{3w+2+i}{w-b}$$
$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{(3z+2+i)/(z-w)}{z-b}\,dz = \left.\frac{3z+2+i}{z-w}\right|_{z=b} = \frac{3b+2+i}{b-w}$$

Recordando que $\gamma = C_1 - C_2$, se obtiene:

$$g(w) = I_1 - I_2 = \frac{3w+2+i}{w-b} - \frac{3b+2+i}{b-w} = \frac{3(w+b)+4+2i}{w-b}$$

$$g(w) = \frac{3(w-b)+6b+4+2i}{w-b} = 3 + \frac{6b+4+2i}{w-b}$$

$$g(w) = 3 + \frac{6b+4+2i}{(w-a)-(b-a)} = 3 + \frac{6b+4+2i}{b-a}\cdot\frac{1}{((w-a)/(b-a))-1}$$

$$g(w) = 3 - \frac{6b+4+2i}{b-a}\cdot\frac{1}{1-((w-a)/(b-a))} \quad \forall w \in D_R(a)$$

Se observa que la igualdad anterior vale solo para $w \in D_R(a)$. Para otros $w$ la función de la derecha existe y $g(w)$ también, pero no tienen por qué ser iguales. Se observa que $|(w-a)/(b-a)| < 1/2 < 1$ porque $w \in D_R(a)$. Luego, se puede usar el desarrollo conocido de la serie geométrica de razón $(w-a)/(b-a)$ cuya suma es $1/(1-(w-a)/(b-a))$:

$$g(w) = 3 - \frac{6b+4+2i}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{b-a}\right)^n \qquad (2)$$

El desarrollo de la derecha en (2) es convergente para todo $w$ tal que $|(w-a)/(b-a)| < 1$. Luego el radio de convergencia de la serie de la derecha es $R_0 = |b-a|$. Pero la igualdad (2) de la suma de la serie con $g(w)$, (es decir el desarrollo en serie de potencias de $g(w)$), es válido solo para $w \in D_R(a)$, con radio del desarrollo de $g(w)$ igual a $R = |b-a|/2$.

Operando un poco en (2) se obtiene:

$$g(w) = 3 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6b+4+2i}{(b-a)^{n+1}}(w-a)^n$$

de donde, los coeficientes $a_n$ del desarrollo (1) son:

$$a_0 = 3 - \frac{6b + 4 + 2i}{(b-a)} = \frac{3(a+b) + 4 + 2i}{a-b} = g(a)$$

$$a_n = \frac{6b + 4 + 2i}{(b-a)^{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.$$