Universidad de la República **13 de febrero de 2016**

Facultad de Ingeniería - IMERL

EXAMEN: CALCULO III - SOLUCIONES

Ejercicio 1

(a) Ver teórico.

(b) La intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ con el plano $z = 12$, es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, con $z = 12$, luego $\int_C f = \int_C 12 = 12\text{long}(\{x^2 + y^2 = 25\}) = 12 \times 2 \times \pi \times 5 = 120\pi$.

Ejercicio 2

(a) Ver teórico.

(b) $\text{div}(X) = div\,(x^2, xy, 5) = 3x$, aplicando el teorema de Gauss, obtenemos que

$$\iint_S X = \iiint_V 3xdxdydz = \int_0^6 3xdx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dz =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^6 x\,(12-2x)^2\,dx = 54.$$

Ejercicio 3

(a) Ver teórico.

(b) Vamos a mostrar dos caminos posibles para resolverlo.

Usando el teorema de Stokes: Hallamos Y potencial vector de X (existe por ser X solenoidal en $\mathbb{R}^3$), entonces aplicando Stokes obtenemos que $\iint_S X = \iint_S \text{rot}(Y) = \int_C Y$ siendo C el borde de S. Resolviendo el sistema $\text{rot}(Y) = X = (0, 0, x)$ con tercer componente de Y nula, encontramos que el campo $Y = \frac{1}{2}(0, x^2, 0)$ es un potencial vector de X, luego, $\int_C Y = \frac{1}{2}\int_C x^2 dy$. Teniendo en cuenta que $z = x(1-x)y(1-y)$ con $(x, y) \in [0, 1]^2$ y parametrizando cada uno de los cuatro segmentos, se obtiene que $\frac{1}{2}\int_C x^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = 1/2$.

Por definición: Sea $\Phi : [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S definida mediante:

$$\Phi(u, v) = (u, v, u(1-u)v(1-v))$$

Entonces $\Phi_u \wedge \Phi_v = (-(1-2u)v(1-v), -(1-2v)u(1-u), 1)$ y por tanto la orientación inducida por la parametrización coincide con la orientación pedida, luego:

$$\iint_S X = \iint_{[0,1]^2} \langle X(\Phi(u, v)), \Phi_u \wedge \Phi_v\rangle\, dudv = \int_0^1 dv \int_0^1 udu = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Sea α la poligonal, observar que a pesar que dicha curva es $\mathcal{C}^1$ excepto en un punto se puede aplicar la propiedad de la parte anterior (pues en cada segmento es $\mathcal{C}^1$), por tanto consideremos β el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$ se tiene que:

$$\int_\alpha X dl = \int_\beta X dl = \int_0^2 \langle X(t,0),(1,0)\rangle \, dt = 2.$$