Solución Segundo Parcial

30 de noviembre de 2015

Múltiple Opción

- Versión cuyo primer ejercicio comenzaba con *"Sea F un campo vectorial C^2...".*

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
A	Todas suman 5 puntos	A	D	D	D

- Versión cuyo primer ejercicio comenzaba con *"Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 el campo de velocidades de un fluido...".*

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
A	D	D	C	B	Todas suman 5 puntos

Desarrollo

Ejercicio 1

1) Como $\nabla.X = 0$, entonces X es solenoidal.

2) Como el dominio de X es $\mathbb{R}^3$, por ser X solenoidal, sabemos que existe Y potencial vector de X, es decir, existe Y tal que $\nabla \times Y = X$.
Escribiendo $Y = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} C_y - B_z &= -2e^{x-2y} - 2xz \\ A_z - C_x &= -e^{x-2y} \\ B_x - A_y &= z^2 - x \end{aligned}$$

Si imponemos $C(x,y,z) = 0$, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} -B_z &= -2e^{x-2y} - 2xz \\ A_z &= -e^{x-2y} \\ B_x - A_y &= z^2 - x \end{aligned}$$

Comenzando con la primer igualdad, se tiene que $B(x,y,z) = 2ze^{x-2y} + xz^2 + \beta(x,y)$. Siguiendo con la segunda igualdad, se tiene que $A(x,y,z) = -ze^{x-2y} + \alpha(x,y)$. Luego, utilizando la tercer igualdad, se llega a que $\beta_x(x,y) - \alpha_y(x,y) = -x$. Imponiendo $\alpha(x,y) = 0$, se tiene que $\beta(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \gamma(y)$. Imponiendo a su vez $\gamma(y) = 0$ tenemos entonces un potencial vector de X, $Y = \left(-ze^{x-2y}, 2ze^{x-2y} + xz^2 - \frac{x^2}{2}, 0\right)$.

Ejercicio 2

1) Ver teórico.

2) Ver teórico.

3) Sean α y β dos circunferencias centradas en el origen, supongamos que el radio de β es más grande que el de α. Sea γ una curva que conecta un punto de α con un punto de β contenida en el interior de β pero en el exterior de α. Se considera la curva $C = \beta \cup \gamma \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}$. Entonces C es una curva cerrada, y $(0,0)$ no está en su interior, por lo tanto se le puede aplicar el teorema de Green a la curva C para obtener

$$\int_C X = \iint_{\text{int}(C)} \text{rot}(X).\vec{k}\, dxdy = 0$$

Porque X es irrotacional. Luego, se tiene que

$$0 = \int_C X = \int_\beta X + \int_\gamma X + \int_{\bar{\alpha}} X + \int_{\bar{\gamma}} X$$

Como $\int_{\bar{\alpha}} X = -\int_\alpha X$ y $\int_{\bar{\gamma}} X = -\int_\gamma X$ se concluye que

$$\int_\alpha X = \int_\beta X$$

4) El dominio de X es $\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$ y como $\nabla \times X = 0$, por la parte anterior, la circulación sobre toda circunferencia de centro $(0,0)$ recorrida una sola vez y en sentido antihorario es constante, por lo que calcular la circulación sobre el rectángulo que rodea al $(0,0)$ es equivalente a calcular la circulación de X sobre la circunferencia de radio 1 centrada en $(0,0)$.
Parametrizando la circunferencia como $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, se tiene que $\int_\alpha X d\alpha = 2\pi$. Esta es la circulación en sentido antihorario, por lo que la circulación de X en sentido horario sobre el rectángulo es -2π.