Solución Primer Parcial

2 de octubre de 2015

Múltiple Opción

- Versión cuyo primer ejercicio comenzaba con *"La geometría del álabe de una máquina centrífuga..."*.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
E	C	A	D	B	B

- Versión cuyo primer ejercicio comenzaba con *"Dada la superficie parametrizada por..."*.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
B	E	C	C	A	A

Desarrollo

Ejercicio 1

1) Ver teórico.

2) Ver teórico.

Ejercicio 2

1) Sean $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, $\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$. Como f es de clase C^2 las derivadas segundas cruzadas coinciden, luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(g\nabla f) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ gf_x & gf_y & gf_z \end{vmatrix} \\
&= (g_y f_z + g f_{yz} - g_z f_y - g f_{yz}, \\
&\quad g_z f_x + g f_{xz} - g_x f_z - g f_{xz}, \\
&\quad g_x f_y + g f_{xy} - g_y f_x - g f_{xy}) \\
&= (g_y f_z - g_z f_y, g_z f_x - g_x f_z, g_x f_y - g_y f_x)
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\nabla f \wedge \nabla g &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ g_x & g_y & g_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= (g_y f_z - g_z f_y, g_z f_x - g_x f_z, g_x f_y - g_y f_x)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{rot}(g\nabla f) = \nabla f \wedge \nabla g$.

2) $g\nabla f + f\nabla g$ es de gradientes si y sólo si $\mathrm{rot}(g\nabla f + f\nabla g) = \vec{0}$.
$\mathrm{rot}(g\nabla f + f\nabla g) = \mathrm{rot}(g\nabla f) + \mathrm{rot}(f\nabla g) = \nabla g \wedge \nabla f + \nabla f \wedge \nabla g = \nabla g \wedge \nabla f - \nabla g \wedge \nabla f = \vec{0}$.

3) ϕ es potencial de $g\nabla f + f\nabla g$ si y sólo si $\nabla\phi = g\nabla f + f\nabla g$.
$g\nabla f + f\nabla g = g(f_x, f_y, f_z) + f(g_x, g_y, g_z) = (gf_x + fg_x, gf_y + fg_y, gf_z + fg_z)$.
El potencial ϕ tiene que cumplir entonces:

$$\phi_x = gf_x + fg_x = (fg)_x$$

$$\phi_y = gf_y + fg_y = (fg)_y$$

$$\phi_z = gf_z + fg_z = (fg)_z$$

Se tiene entonces que $\phi = fg$ es un potencial de $g\nabla f + f\nabla g$.