Universidad de la República **28 de noviembre de 2015**

Facultad de Ingeniería-IMERL

SEGUNDO PARCIAL: CALCULO III

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Marcar las opciones correctas en el siguiente cuadro.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6

Ejercicio 1

Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 el campo de velocidades de un fluido, tal que su primera componente es nula, y su segunda componente, $B(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 9z$. Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde parametrizada por:

$$\begin{cases} x = v\cos u & u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = v\sin u & v \in [0, 1] \\ z = 2uv\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(1 - v) & \end{cases}$$

orientada con la normal con tercera componente negativa.

(A) -2.

(B) -4.

(C) 4.

(D) 0.

(E) -1.

Ejercicio 2

Sean $X = \left(\frac{x+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ y
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Entonces:

(A) $\iint_S X \neq 0$, pero existe S' superficie cerrada que rodea al origen tal que $\iint_{S'} X = 0$.

(B) Como $\operatorname{div}(X) = 0$, entonces X tiene potencial vector en su dominio.

(C) Como $\operatorname{div}(X) \neq 0$, entonces X no tiene potencial vector en su dominio.

(D) Como $\iint_S X \neq 0$, entonces X no tiene potencial vector en su dominio.

(E) Como $\operatorname{div}(X) = 0$, entonces $\iint_S X = 0$.

Ejercicio 3

Sea F un campo vectorial C^2 y r el vector posición. Se consideran las siguientes afirmaciones.

1. $\nabla \cdot (F \times r) = r \cdot (\nabla \times F)$
2. $\nabla \cdot F + \nabla \cdot r = \nabla \cdot (\nabla \times (F + r))$
3. $\nabla \times (F \times r) = \nabla \times F + \nabla \times r$

(A) Hay más de una afirmación correcta.

(B) Solamente la afirmación 3 es correcta.

(C) Solamente la afirmación 2 es correcta.

(D) Solamente la afirmación 1 es correcta.

(E) Ninguna afirmación es correcta.

Ejercicio 4

Sean $\omega = y^2 z\, dx + z\cos(x)\, dy + \sin(xy)\, dz$ y $\eta = e^{x+y}\, dx + y^3\, dy$. Entonces:

(A) $d\omega \wedge \eta = \left(\left(y^2 - x\cos(xy)\right) y^3 + \left(y\cos(xy) - cos(x)\right) e^{x+y}\right)\, dxdydz.$

(B) $d\omega \wedge \eta = \left(y\cos(xy) - \cos(x)\right) e^{x+y}\, dxdydz.$

(C) $d\omega \wedge \eta = \left(\left(y^2 - y\cos(xy)\right) y^3 + \left(x\cos(xy) - cos(x)\right) e^{x+y}\right)\, dxdydz.$

(D) $d\omega \wedge \eta = \left(\left(y^2 - x\cos(xy)\right) y^3 + \left(y\sin(xy) - cos(x)\right) e^{x+y}\right)\, dxdydz.$

(E) $d\omega \wedge \eta = \left(\left(x\cos(xy) - y^2\right) y^3 + \left(x\cos(xy) - cos(x)\right) e^{x+y}\right)\, dxdydz.$

Ejercicio 5

Se tiene una cañería con sección triangular isósceles. Hallar el módulo del caudal Q del campo de velocidades dado por $\vec{V} = (8y, 8z, 8x)$ que pasa por la sección que tiene vértices $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y $(0, 0, 1)$.

(A) $|Q| = 3.$

(B) $|Q| = \frac{4}{3}.$

(C) $|Q| = \frac{7}{3}.$

(D) $|Q| = \frac{3}{8}.$

(E) $|Q| = \frac{7}{8}.$

Ejercicio 6

Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ de forma que $S = S_1 \cup S_2$, donde:

$$S_1(u,v) = \begin{cases} x = u\cos v & 0 \le u \le 1 \\ y = u\sin v & 0 \le v < 2\pi \\ z = cu & \end{cases}$$

$$S_2(u,v) = \begin{cases} x = u\cos v & 0 \le u \le 1 \\ y = u\sin v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c & \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}$ es constante.

Si se sabe que el flujo entrante de $\vec{Y} = (x, y, z)$ a través de S es 1, entonces:

(A) $c = 0.$

(B) $c = \frac{1}{\pi}.$

(C) $c = \frac{1}{2\pi}.$ $c = -\frac{1}{\pi}.$

(D) $c = -\frac{1}{2\pi}.$

(E) $c = \frac{1}{2\pi}.$

Ejercicios de desarrollo (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1 (10 puntos)

Dado el campo $X(x, y, z) = (-2e^{x-2y} - 2xz, -e^{x-2y}, z^2 - x)$.

1. Probar que X es solenoidal en $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar un potencial vector para X.

Ejercicio 2 (20 puntos)

1. Enunciar y demostrar el teorema de Green.
2. Probar que Si $X : D\,(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ es irrotacional en D simplemente conexo, entonces X es de gradientes en D.
3. Si $X : \mathbb{R}^2 - \{(a, b)\} \to \mathbb{R}^2$ es irrotacional, porbar que la circulación sobre toda circunferencia de centro $(0, 0)$ recorrida una sola vez y recorrida en sentido antihorario es constante.
4. Hallar la circulación en sentido horario del campo $X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ sobre el rectángulo de vértices $(-1, -1), (-1, 3), (1, -1)$ y $(1, 3)$.