Universidad de la República **2 de octubre de 2015**

Facultad de Ingeniería-IMERL

PRIMER PARCIAL: CALCULO III

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos, respuesta incorrecta: -1 punto, no respuesta: 0 punto.

Ejercicio 1

Dada la superficie parametrizada por $\Phi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$, con $u \in (-\pi,\pi)$ y $v \in (0,2\pi)$. Entonces el plano tangente a la superficie en el punto $(0,2,1)$

(A) Es $3x + y - z = 1$.

(B) Es $z = 1$.

(C) Es $x + y + z = 3$.

(D) No existe porque el toro no es regular en ese punto.

(E) Es $y - 2z = 0$.

Ejercicio 2

La geometría del álabe de una máquina centrífuga sin desprendimiento de capa límite está descrita por la curva $\gamma(t) = \left(e^{\sqrt{3}\pi t}\cos \pi t, e^{\sqrt{3}\pi t}\sin \pi t\right) \subset \mathbb{R}^2$, con $t \in \mathbb{R}$. Sea $\overrightarrow{\mathbf{t}_\gamma}(t)$ el versor tangente a la curva en el instante t. Entonces, el ángulo que forman $\overrightarrow{\mathbf{t}_\gamma}(t)$ y $\gamma(t)$, al que llamaremos $\alpha(t)$, vale:

(A) $\alpha(t) = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(B) $\alpha(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(C) $\alpha(t) = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) e^{\sqrt{3}\pi t}$.

(D) $\alpha(t) = \frac{\pi}{6} e^{\sqrt{3}\pi t}$.

(E) $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3

Para la curva $\gamma(t)$ del ejercicio anterior, su reparametrización por longitud de arco es:

(A) $\beta = \gamma \circ s$ siendo $s(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}\pi t}$.

(B) γ no se puede reparametrizar por longitud de arco, pues γ no es rectificable.

(C) $\beta = \gamma \circ s^{-1}$ siendo $s(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(e^{\sqrt{3}\pi t} - 1 \right)$.

(D) $\beta = \gamma \circ s$ siendo $s(t) = \frac{\pi}{3} \left(e^{\sqrt{3}\pi t} - \sqrt{3}\pi \right)$.

(E) $\beta = \gamma \circ s^{-1}$ siendo $s(t) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \left(e^{\sqrt{3}\pi t} - 1 \right)$.

Ejercicio 4

Se considera $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq R^2\}$, con $R > 0$. Sea $\Phi(x, y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\Phi(x, y) = V_0(x + \frac{R^2 x}{x^2+y^2})$, siendo V_0 una constante positiva. V es el campo vectorial definido como $V(x, y) = \nabla\Phi(x, y)$. Entonces

(A) Existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $(\nabla \times V(x_0, y_0)) \cdot \hat{k}$ es estrictamente negativo.

(B) $V(0, R) = V(0, -R) = (V_0, 0)$.

(C) Existen dos puntos de $\partial\Omega$ donde $V(x, y)$ es nulo.

(D) $V(x, y) = V(x, -y)$, $\forall (x, y) \in \Omega$.

(E) Existe una curva cerrada contenida en Ω donde la circulación de V es diferente de cero.

Ejercicio 5

El campo de velocidades de un vórtice de eje vertical de un fluido incompresible está dado por $V : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $V(r, \theta) = \frac{k}{r}(-\sin\theta, \cos\theta)$, con $r > 0$; donde r y θ son las coordenadas polares del punto (x, y), y $k \neq 0$, dato. Sea $\Gamma(r)$ la circulación de V en una circunferencia C_r de radio r, orientada en sentido positivo, que da una vuelta alrededor de $(0, 0)$. Entonces

(A) $\Gamma(r)$ es independiente de C_r y existe $\Phi(r, \theta)$ un potencial escalar de V en la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ que cumple $\Phi(r, \theta) = \Phi(\theta)$.

(B) $\Gamma(r)$ es independiente de C_r y existe $\Phi(r, \theta)$ un potencial escalar de V en la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(C) $\Gamma(r)$ toma diferentes valores, uno para cada circunferencia C_r y no existe ningún campo escalar $\Phi(r, \theta)$ en la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, de tal forma que $V(r, \theta)$ se puede escribir como $V(r, \theta) = -\nabla\Phi(r, \theta)$.

(D) Como $\Gamma(r) \neq 0$, no existe potencial escalar de V en la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(E) $\Gamma(r)$ toma diferentes valores, uno para cada circunferencia C_r, de tal forma que $\Gamma(r)$ es proporcional a $\frac{1}{r}$.

Ejercicio 6

Dados el campo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se sabe que es irrotacional y que $X(t, 0) = (2t + 1, 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y la curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \geq 0\}$ recorrida en sentido antihorario. Entonces $\int_C X =$

(A) -2.

(B) 2.

(C) -4.

(D) 4.

(E) 0.

Ejercicio de desarrollo (Total: 10 puntos)

Ejercicio 1 (5 puntos)

Se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto.

1. Dadas la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y una curva $C \subset \Omega$ con origen en A y extremo en B, demostrar que $\int_C \nabla f = f(B) - f(A)$.
2. Dado el campo $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$, donde X es continuo sobre Ω abierto. Probar que si X es de gradientes en Ω, entonces $\int_C X = 0$ para toda $C \subset \Omega$ curva cerrada.

Ejercicio 2 (5 puntos)

Dadas $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

1. Probar que $rot\,(g\nabla f) = \nabla g \wedge \nabla f$.
2. Probar que $g\nabla f + f\nabla g$ es de gradientes en $\mathbb{R}^3$.
3. Hallar un potencial de $g\nabla f + f\nabla g$ en $\mathbb{R}^3$.