Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2014**

Examen – Martes 10 de febrero de 2015

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas y media.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- Rotor de un campo vectorial: $\nabla \times F$
- Divergencia de un campo vectorial: $\nabla . F$
- Integral de línea de un campo vectorial: $\int_C F$

Fórmulas: Puede ser de utilidad la siguiente información:

- $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$, $\operatorname{senh}(t) = (e^t - e^{-t})/2$, $\tanh(t) = \operatorname{senh}(t)/\cosh(t)$.
- Si $\gamma = \gamma(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3$ entonces el versor normal en cada $t \in \mathbb{R}$ es: $n(t) = \frac{(\dot\gamma(t)\wedge\ddot\gamma(t))\wedge\dot\gamma(t)}{\|(\dot\gamma(t)\wedge\ddot\gamma(t))\wedge\dot\gamma(t)\|}$, y la curvatura k y la torsión τ están dadas por $k = \frac{\|\dot\gamma\wedge\ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}$, $\tau = \frac{(\dot\gamma,\ddot\gamma,\dddot\gamma)}{\|\dot\gamma\wedge\ddot\gamma\|^2}$.

(I) Múltiple opción. Total: 50 puntos

Puntajes: 10 puntos si la respuesta es correcta, 0 puntos si la respuesta es incorrecta o si no se responde.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Considere la curva definida por $\alpha(t) = (\cosh(t), \operatorname{senh}(t), t)$.
Indique la opción correcta:

A) α está parametrizada por longitud de arco.
B) α es una curva plana (esto es: $\tau = 0\ \forall t$).
C) α parametriza una hélice (esto es: κ/τ es constante para todo t).
D) La norma de la aceleración de α es constante.
E) El versor normal de α en cada $t \in \mathbb{R}$ es $n(t) = (0, -\tanh(t), 1/\cosh(t))$.

Ejercicio 2

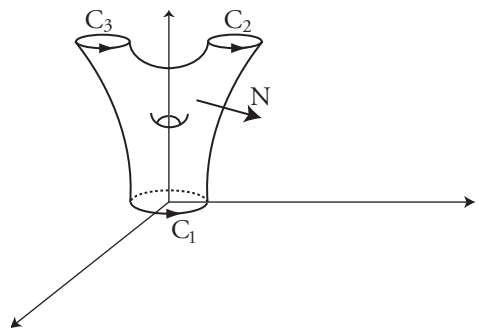
Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + y^2, \frac{-x}{x^2+y^2} + x\right)$. Sea C el borde del cuadrado de vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ y $(1,-1)$ orientado en sentido antihorario. Entonces la circulación de F sobre C es:

A) 0.
B) -2π.
C) $-\pi$.

D) 4.
E) $2(2-\pi)$.

Ejercicio 3

Sea $F : S \to \mathbb{R}^3$ un campo irrotacional, donde S es la superficie que se muestra en la figura, con la normal orientada hacia afuera.



Para cada $i = 1, 2, 3$, I_i denota la circulación de F sobre C_i, con las orientaciones dadas en la figura. Se sabe que $I_1 = 4$ e $I_3 = 2$.
Entonces:

A) $I_2 = -2$.
B) $I_2 = -4$.
C) $I_2 = 6$.
D) $I_2 = 2$.
E) $I_2 = -6$.

Ejercicio 4

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por $F(x, y, z) = \left(x, y, (z-2)(z-1)e^{x^2+y^2-z^2}\right)$. Considere el volumen V definido por las condiciones

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \ , \ 1 \leq z \leq 2.$$

Entonces la integral de $\nabla . F$ en V es:

A) $\frac{5}{3}\sqrt{2}\pi$.
B) $\frac{31}{6}\pi$.
C) 0.
D) $\frac{7}{3}\pi$.
E) 2π.

Sugerencia: El uso de coordenadas cilíndricas puede ser de utilidad.

Ejercicio 5

Considere las formas diferenciales:

$$\begin{aligned} \omega &= x^2 y\, dy \\ \eta &= \operatorname{sen}^2 x\, dz + \frac{e^{2z}}{x}\, dx \end{aligned}$$

definidas para $x \neq 0$. Entonces $d(\omega \wedge \eta)$ es:

A) $2xy(\operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{sen} x \cos x - e^{2z})\, dx \wedge dy \wedge dz$.
B) $2x^2 y \left(\operatorname{sen}^2 x + e^{2z}\right)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
C) $2x^2 y \left(\operatorname{sen}^2 x - e^{2z}\right)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
D) $2xy \left(\operatorname{sen}^2 x - e^{2z}\right)\, dx \wedge dy \wedge dz$.
E) $2xy \left(\operatorname{sen}^2 x + e^{2z}\right)\, dx \wedge dy \wedge dz$.

(II) Desarrollo. Total: 50 puntos

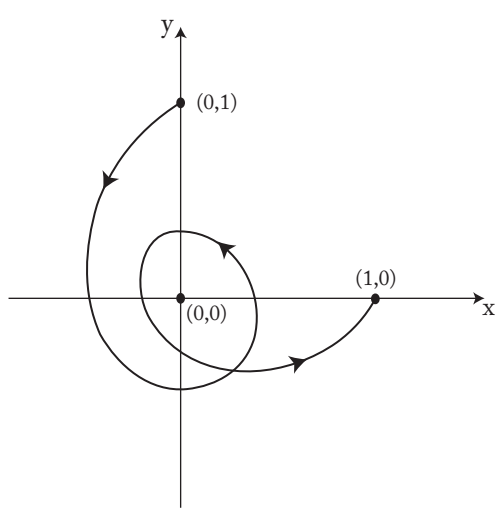
Problema 1 (20 puntos)

Considere la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

a) **(8 puntos)** Calcule $\nabla\varphi$.
b) **(12 puntos)** Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por:

$$F(x,y) = \left(\frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Calcule $\int_\gamma F$, donde γ es la curva de la figura.



Problema 2 (30 puntos)

Nota: El objetivo de este problema es exhibir un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que existe un campo vectorial F que cumple $\nabla . F = 0$ en todo D, pero F no es un campo de rotores (es decir, no existe un campo vectorial G tal que $\nabla \times G = F$ en D).

Sea D la porción de $\mathbb{R}^3$ que queda contenida entre dos esferas concéntricas centradas en el origen de radios a y b, $0 < a < b$. Considere el campo $F(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

a) **(3 puntos)** Haga un bosquejo de la región D y verifique que $\nabla . F = 0$ en D.

Suponga en lo que sigue que $F = \nabla \times G$ para algún campo vectorial G en D.

b) **(5 puntos)** Pruebe que
$$\iint_S \nabla \times G . n \, dS = \int_\alpha G$$
donde S es una esfera de radio R centrada en el origen, con $a < R < b$, a la que se le ha quitado un casquete centrado en su polo norte, α es la curva definida por el borde del casquete y $n = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es el campo de versores normales salientes a S.

c) **(4 puntos)** Pruebe que
$$\nabla \times G . n = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

d) **(4 puntos)** Pruebe que
$$\iint_S \nabla \times G . n \, dS = \frac{\text{área}(S)}{R^2}.$$

e) **(4 puntos)** Pruebe que cuando el casquete que se quita de S tiende a un punto, el valor de $\iint_S \nabla \times G . n \, dS$ tiende a 4π.

f) **(5 puntos)** Pruebe que existe $M > 0$ tal que
$$\left| \int_\alpha G \right| \leq M . \text{longitud}(\alpha).$$

g) **(5 puntos)** Use todo lo anterior para deducir que F no es un campo de rotores en D.

SOLUCIÓN

(I) Múltiple opción

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
C	E	D	B	A

(II) Desarrollo

Problema 1

a)

$$\nabla\varphi(x,y) = \left(\frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

b) Notemos que $F(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$, de manera que F es un campo de gradientes y entonces:

$$\int_\gamma F = \varphi(1,0) - \varphi(0,1) = 0.$$

Problema 2

a) Escribiendo $F = (F_1, F_2, F_3)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

De manera que: $\nabla . F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$.

b) Fórmula de Stokes: la curva α es el borde de la superficie S.

c)

$$\nabla \times G.n = F.n = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} . \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

d) Notemos que de la parte anterior se obtiene que $\nabla \times G.n$ es constante sobre la superficie esférica S de radio R. En efecto: $\nabla \times G.n = \frac{1}{R^2}$ sobre todo S. De manera que:

$$\iint_S \nabla \times G.n\, dS = \iint_S \frac{1}{R^2}\, dS = \frac{\text{área}(S)}{R^2}.$$

e) Cuando el casquete que se quita de S tiende a un punto (el polo norte) entonces área(S) tiende a $4\pi R^2$, que es el área de la esfera completa. De la parte anterior se obtiene entonces que $\iint_S \nabla \times G.n\, dS$ tiende a 4π.

f) Se tiene, usando la definición de integral de línea ($r(t)$, con $t \in [a,b]$, es una parametrización de α) y desigualdades bien conocidas:

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha G\right| &= \left|\int_a^b G(r(t)).\, r'(t)dt\right| \leq \int_a^b |G(r(t)).\, r'(t)|dt \leq \int_a^b ||G(r(t))||\, ||r'(t)||dt \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} ||G(r(t))|| \int_a^b ||r'(t)||dt = M.\,\text{longitud}(\alpha),\end{aligned}$$

donde M denota el valor máximo de $||G||$ sobre la curva α.

g) Supongamos que $F = \nabla \times G$ y consideremos la superficie S cuando el casquete que se quita tiende a un punto (esto es: longitud$(\alpha) \to 0$). Como se vio en las partes anteriores, el lado izquierdo de la parte b) tiende a 4π, mientras que el lado derecho tiende a 0 como consecuencia de la cota de la parte g). Esto es absurdo. Por lo tanto F no es campo de rotores.