Universidad de la República **Cálculo III**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Examen Julio 2015**

Examen Julio
Viernes 17 de julio de 2015

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicio 1 (25 puntos)

(a) Enunciar el Teorema de Stokes.

(b) Se consideran los campos vectoriales:

$$\vec{X}_1 = (y + sen(z), x + z, y - cos(z)),$$
$$\vec{X}_2 = \left(\frac{x}{y^2+z^2}, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}\right)$$

y la curva $\mathcal{C}$ definida como $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \ : \ y^2 + z^2 = 4, \ x = 1\}$ orientada en sentido horario si miramos desde el origen.

Calcular la circulación de cada uno de los campos $\vec{X}_i, \ i = 1, 2$ a través de $\mathcal{C}$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

(a) Enunciar el teorema de Gauss.

(b) Sea la superficie abierta $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : z = -(x^2 + y^2) + 1, z \in [0, 1]\}$ orientada con normal exterior y el campo X tal que:

- $div(X) = x^2 + y^2$
- $X(x, y, 0) = (1, x + y, e^{x^2+y^2})$

Calcular $\int\int_S X d\overrightarrow{S}$

Ejercicio 3 (30 puntos)

(a) Sea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo, demostrar que F es de gradientes si y solo si para todo par de curvas diferenciables α, β con los mismos extremos inicial y final se cumple que $\int_\alpha F = \int_\beta F$

(b) Sean $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \neq 0\}$ y el campo

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \left(x^2, y^2 + \frac{z}{y^2+z^2}, z^2 - \frac{y}{y^2+z^2}\right)$$

Investigar si el campo F es de gradientes en Ω. En caso que el campo no sea de gradientes justificar, si lo es expresar un potencial.

Ejercicio 4 (20 puntos) Sea la forma $\omega = -ydx + xdy$

(a) Calcular la derivada de ω

(b) Usando la parte a, calcular el flujo del campo $(0, 0, 1)$ a través de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^4}{16} = 1, \quad z \geq 0\}$$

orientado con normal cuya tercer componente es positiva. Qué teorema se está usando?

El siguiente es un ejercicio optativo, cuyo puntaje contabilizará en la suma de los 100 puntos

Ejercicio 5 (5 puntos) Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la trayectoria de un objeto de masa m bajo la acción de una fuerza total $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la trayectoria α es

$$\frac{1}{2}m||\alpha'(b)||^2 - \frac{1}{2}m||\alpha'(a)||^2$$

es decir, es la diferencia de la energía cinética.

(Sugerencia: Puede ser útil considerar la segunda ley de Newton $F_{\text{Total}} = ma$)