Universidad de la República **Cálculo III**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2015**

Soluciones Examen Julio
Viernes 17 de julio de 2015

Ejercicio 1

(a) Ver teórico.

(b) Para el primer campo $\vec{X}_1$ calculamos su rotor:

$$Rot(\vec{X}_1) = (0, cos(z), 0)$$

Y por lo tanto aplicando Stokes se obtiene que:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}_1 dl = \iint_{\Omega} (0, cos(z), 0) \cdot (1, 0, 0) dS = 0$$

Para $\vec{X}_2$ (obsérvese que no podemos aplicar el teorema de Stokes) parametrizamos la curva $\mathcal{C}$ como:

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (1, 2cos(t), 2sen(t))$$

Luego:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}_2 dl = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}, \frac{-2sen(t)}{4}, \frac{2cos(t)}{4} \right) \cdot (0, -2sen(t), 2cos(t))\, dt = 2\pi$$

Ejercicio 2

(a) Ver teórico

(b) Sean

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -(x^2 + y^2) + 1, \quad z \in [0, 1] \right\}$$

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = 0 \right\}$$

Consideramos V la región acotada del espacio tal que $\partial V = S \cup T$. Observar que la orientación en S es compatible con orientar la superficie cerrada $S \cup T$ con normal saliente, luego aplicando el teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{X} \hat{n} dS + \iint_T \vec{X} \hat{n} dS = \iiint_V div(\vec{X}) dxdydz$$

entonces:

$$\iint_S \vec{X} \hat{n} dS = \iiint_V div(\vec{X}) dxdydz - \iint_T \vec{X} \hat{n} dS$$

donde T está orientado con normal cuya tercer componente es negativa. Consideremos una parametrización de T:

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 0), \quad \rho \in (0, 1), \theta \in (0, 2\pi)$$

Aquí $\phi_\rho \wedge \phi_\theta = (0,0,\rho)$ por lo tanto esta parametrización induce una orientación opuesta a la original, luego:

$$\iint_T \vec{X}\hat{n}dS = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = -\pi(e-1)$$

por otro lado:

$$\iiint_V div(\vec{X})dxdydz = \iiint_V x^2 + y^2 dxdydz = \frac{\pi}{6}$$

luego:

$$\iint_S \vec{X}\hat{n}dS = \pi(e-1) + \frac{\pi}{6}$$

Ejercicio 3

(a) Ver teórico

(b) Consideremos $\mathcal{C}$ la curva parametrizada:

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (0, cos(t), sen(t))$$

Luego:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}dl = \int_0^{2\pi} -sin(t)cos^2(t) - sin^2(t) + sin^2(t)cos(t) - cos^2(t)dt = -2\pi$$

Por lo tanto $\vec{F}$ no es de gradientes en Ω

Ejercicio 4 Sea la forma $\omega = -ydx + xdy$. Entonces:

(a) $d\omega = 2dxdy$

(b) Primero observar que:

$$\iint_S \vec{X}\hat{n}dS = \frac{1}{2}\iint_S dw$$

Luego aplicando el Teorema de Stokes se obtiene:

$$\iint_S \vec{X}\hat{n}dS = \frac{1}{2}\int_{\partial S} w = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen^2(t) + cos^2(t)dt = \pi$$

Ejercicio 5

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_a^b m\alpha''(t) \cdot \alpha'(t)dt$$

$$= \int_a^b m\left(\frac{\|\alpha'(t)\|^2}{2}\right)' dt = \frac{m}{2}\int_{\|\alpha'(a)\|^2}^{\|\alpha'(b)\|^2} du = \frac{m}{2}\left(\|\alpha'(b)\|^2 - \|\alpha'(a)\|^2\right)$$