**Universidad de la República** **Cálculo III**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Examen Diciembre 2015**

Examen Diciembre
Viernes 11 de diciembre de 2015

| Nro de Examen | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

**Ejercicio 1 (30 puntos)**

Sea $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^1$ definido en todo $\mathbb{R}^3$.

(a) Definir la divergencia de $X$, $div(X)$.

(b) Definir potencial vector de $X$.

(c) Probar que si $div(X) \equiv 0$, entonces $X$ tiene un potencial vector.

(d) Sea $X(x, y, z) = (x^2 - y, -2xy + yz, -z^2/2 + x^2)$, y sea ABCO el tetraedro definido por los vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ y $O = (0, 0, 0)$. Llamemos $S$ a la superficie del tetraedro orientada con la normal exterior. Calcular $\iint_S X dS$.

**Ejercicio 2 (40 puntos)**

(a) Enunciar el teorema de Green.

(b) Usar el teorema de Green para obtener una fórmula de área a partir de la parametrización de la curva que la delimita.

(c) Hallar el área de la superficie delimitada por la curva parametrizada por

$$\alpha(t) = (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Puede ser útil recordar:

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$$

**Ejercicio 3 (30 puntos)**

(a) Enunciar el teorema de Stokes.

(b) Calcular $\iint_S Rot(X) dS$, donde $X = (z, x, y)$ y $S$ es la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 1$, orientada con la normal que tiene tercera componente no negativa.