Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

PRÁCTICO 6

Semana 11
Teorema de Gauss y ley de Gauss

EN CLASE:

1. Demostrar que:

$$\iiint_W \nabla f.X dxdydz = \iint_{\partial W} fX.ndS - \iiint_W f \operatorname{div} X dxdydz$$

2. Si X es un campo tangente a la superficie cerrada $S = \partial W$, mostrar que

$$\iiint_W \operatorname{div} X dV = 0$$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Usar el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $X = (x - y, y - z, z - x)$ hacia el exterior de la esfera unidad. Dibujar el campo con `quiver3` y la superficie con `surf` en `Octave`.

2. Calcular $\iint_{\partial W} X d\vec{S}$ donde $X = (x, y, z)$ y W es el cubo unitario, es decir, $W = [0, 1]^3$. Realizar el cálculo directamente y comprobarlo usando el teorema de Gauss.

3. Sea $X = (y, z, xz)$. Calcular $\iint_{\partial W} X d\vec{S}$ en cada una de las siguientes regiones W. Dibujar las superficies borde en `Octave`:

   a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
   b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ con $x \geq 0$
   c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ con $x \geq 0$

4. Hallar el flujo del campo $X = (x - y^2, y, x^3)$ hacia el exterior del paralelepípedo $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$.

5. Calcular $\iint_{\partial W} X.ndS$ donde $X = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$ y W es el cilindro macizo $x^2 + y^2 \leq 1$ con $z \in [0, 1]$

6. Demostrar la identidad

$$\operatorname{div}(X \wedge Y) = Y.(\operatorname{rot} X) - X(rotY)$$

7. Evaluar $\iint_{\partial W} X.ddS$, donde $X = (x, y, -z)$ y W es el cubo unitario $W = [0, 1]^3$. Realizar el cálculo directamente y comprobarlo usando el teorema de Gauss.

8. Usar la ley de Gauss para demostrar que el flujo del campo eléctrico debido a una carga Q repartida uniformemente sobre la superficie de una esfera es el mismo en el exterior de esta superficie que en el campo producido por una carga puntual Q colocada en el centro de la esfera. ¿Cuál es el campo en el interior de la esfera?

Semana 12
Ecuaciones de Maxwell
Formas diferenciales

EN CLASE:

1. La ecuación

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

se llama *ecuación de continuidad*. Comprobar que las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de continuidad para J y ρ.

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Para una distribución de cargas estacionaria y una distribución de corriente de divergencia cero, los campos eléctrico y magnético $E(x, y, z)$ y $H(x, y, z)$ satisfacen:

$$\operatorname{rot} E = \vec{0} \qquad \operatorname{div} H = 0 \qquad \operatorname{div} E = \rho \qquad \operatorname{rot} H = J$$

Supongamos que J y ρ son conocidos. La radiación que los campos producen a través de una superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad del flujo de radiación, llamado *campo vectorial de Poynting*

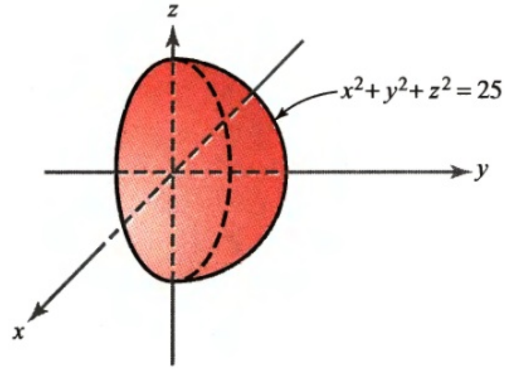
$$P = E \wedge H$$

a) Si S es una superficie cerrada, demostrar que el flujo de radiación - es decir el flujo de P a través de S - viene dado por

$$\iint_S P d\vec{S} = -\iiint_V E.j dV$$

donde V es la región encerrada por S.

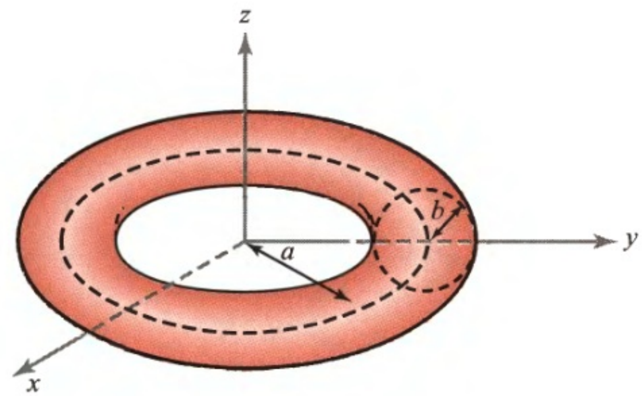
b) Hallar el flujo del vector de Poynting, a través de la superficie de la figura (ojo: superficie abierta)



cuando

$$E(x, y, z) = (0, z, y) \qquad H(x, y, z) = (-xy, x, yz)$$

c) Calcular el flujo de Poynting para los mismos E y H a través de la superficie toroidal de la figura, con $a = 3$, $b = 1$. Luego, con a, b arbitrarios.



2. Sea T el tetraedro limitado por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular

$$\iint_T 3y dx dy + 18z dy dz - 12 dz dx$$

3. Sea T el tetraedro del item anterior. Calcular:

$$\iint_T z dx dy + x^2 dy dz + z dz dx$$

4. Evaluar

$$\iint_S z dx dy + x dy dz + y dz dx$$

donde S es la esfera unidad.

Semana 13

Formas diferenciales

EN CLASE:

1. Evaluar $\omega \wedge \eta$, con $\omega = 2x dx + y dy$ y $\eta = x^3 dx + y^2 dy$.

2. Calcular $d\omega$ donde $\omega = y^2 \cos x dy + xy dx + dz$

3. Sea Ψ un operador que a cada campo vectorial le asigna una 2-forma con el siguiente criterio: si $X = (A, B, C)$, entonces

$$\Psi(X) = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

Mostrar que $\Psi(\operatorname{rot} X) = d(A dx + B dy + C dz)$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Calcular $\omega \wedge \eta$ en los siguientes casos:

   a) $\omega = xdx - ydy$ y $\eta = ydx + xdy$
   b) $\omega = xdx + ydy + zdz$ y $\eta = zdxdy + xdydz + ydzdx$
   c) $\omega = xydydz + x^2dxdy$ y $\eta = dx + dz$
   d) $\omega = e^{xyz}dxdy$ y $\eta = e^{-xyz}dz$

2. Calcular $d\omega$ donde

   a) $\omega = x^2y + y^3$
   b) $\omega = xydy + (x+y)^2dx$
   c) $\omega = xdxdy + zdydz + ydzdx$
   d) $\omega = (x^2+y^2)dydz$
   e) $\omega = (x^2+y^2+z^2)dz$
   f) $\omega = \frac{-x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$
   g) $\omega = x^2ydydz$

3. Sea $X = (G, H, F)$ campo vectorial, y sea $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$. Mostrar que
$$d\eta = (\operatorname{div} X)dxdydz$$

4. Sea $\omega = (x+y)dz + (y+z)dx + (x+z)dy$, y sea S la parte de arriba de la esfera unidad, es decir, los puntos (x,y,z) tales que $x^2+y^2+z^2 = 1$ con $z \geq 0$. ∂S es el circulo unidad en el plano xy. Evaluar $\int_{\partial S}\omega$ directamente y usando el Teorema de Stokes.

5. Sea T el sólido triangular acotado por el plano xy, el plano xz, el plano yz y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular
$$\iint_T zdxdy + x^2dydz + ydzdx$$
directamente y por el Teorema de Gauss.

6. Calcular $\iint_S \omega$ donde $\omega = zdxdy + xdydz + ydzdx$ y S es la esfera unidad, directamente y usando el Teorema de Gauss.

7. Sea R una región elemental de $\mathbb{R}^3$. Mostrar que el volumen de R está dado por
$$\operatorname{vol}(R) = \frac{1}{3}\iint_{\partial R} xdydz + ydzdx + zdxdy$$