Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

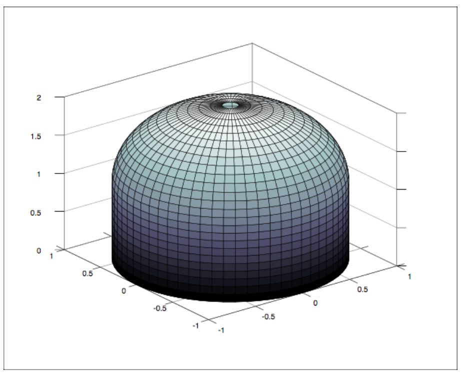
PRÁCTICO 5

Semana 9
Teorema de Stokes

EN CLASE:

1. Evaluar $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$ donde $X = (y, -x, zx^3y^2)$ y S es la superficie dada por $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ con $z \leq 0$ y n, la normal unitaria, apuntando hacia arriba. Dibujar la superficie, los vectores normales y el rotor de X con `Octave`. Dibujar X sobre la curva borde.

2. Comprobar el teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial radial $X = (x, y, z)$.

3. 

   Sea S la superficie de la figura. S es unión de dos superficies: $S_1 = \{(x, y, x) : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$. Y sea $X = (zx + z^2x + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde la superficie se ha orientado de modo que la normal en $(0, 0, 1)$ apunta hacia arriba. Dibujar la superficie, la normal y X con `Octave`. Dibujar X sobre la curva borde.

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde S es la porción de una esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$ y $X = (x, y, z) \wedge (1, 1, 1)$. Dibujar la superficie y el rotor de X con `Octave`, dibujar la curva borde, y el campo X sobre ella.

2. Calcular $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$ y $X = (x^3, -y^3, 0)$.

3. Sea $X = (y, -x, zx^3y^2)$. Hallar $\iint_S \operatorname{rot} X.ndS$, donde S es la superficie dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \leq 0$. Dibujar la superficie y la curva borde con `Octave`.

4. Considerar dos superficies S_1 y S_2, con la misma frontera ∂S. Describir mediante un esquema cómo deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} X d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} X d\vec{S}$$

5. Razonar intuitivamente que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = 0$$

6.
   a) Si $\mathcal{C}$ es el borde de una superficie S y v es un vector constante, demostrar que

   $$\int_{\mathcal{C}} v d\alpha = 0$$

   b) Mostrar el resultado anterior para cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$, aunque no sea el borde de una superficie.

7. Verificar el Teorema de Stokes para el helicoide S dado por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ con $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$ y el campo $X(x,y,z) = (x,y,z)$. Dibujar la superficie y la curva borde con `Octave`.

8. Sea $X = (x^2, 2xy + x, z)$. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, ambos contenidos en el plano $z = 0$.

   a) Determinar el flujo de X hacia el exterior de S (normal hacia arriba)
   b) Determinar la circulación de X a lo largo de $\mathcal{C}$
   c) Hallar el flujo de $\operatorname{rot} X$. Verificar directamente el teorema de Stokes en este caso.
   d) Usando `quiver3`, dibujar X y $\operatorname{rot} X$ en S

9. Integrar $\operatorname{rot} X$, con $X = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre el trozo de superficie $2z = x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2$ de dos formas: directamente y usando el teorema de Stokes. Usando `Octave`, dibujar S y dibujar la curva borde.

Semana 10

EN CLASE:

1. Sea $X = -\frac{GmM\vec{r}}{r^3}$ el campo de fuerza gravitatorio definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

   a) Demostrar que $\operatorname{div} X = 0$
   b) Demostrar que X no tiene un potencial vector de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$
   c) ¿Qué falla?

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Determinar si $X = (x,y,z)$ tiene un potencial vector. En caso afirmativo, hallarlo.

2. Determinar si $X = (x^2 + 1, z - 2xy, y)$ tiene un potencial vector. En caso afirmativo, hallarlo. Dibujar el campo vectorial X con `quiver3`.

3. Sea $X = (xz, -yz, y)$. Comprobar que $\operatorname{div} X = 0$. Hallar un potencial vector de X. Dibujar X y su potencial vector con `quiver3`.

4. Sea $X = (y^2, z^2, x^2)$. Repetir el ejercicio anterior para este campo.

5. Sea $X = (xe^y, -x\cos z, -ze^y)$. Comprobar que $\operatorname{div} X = 0$ y hallar un potencial vector de X. Dibujar X y su potencial vector con `quiver3`.

6. Sea $X = (x\cos y, -\sin y, \sin x)$. Comprobar que $\operatorname{div} X = 0$ y hallar un potencial vector de X. Dibujar X y su potencial vector con `quiver3`