Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

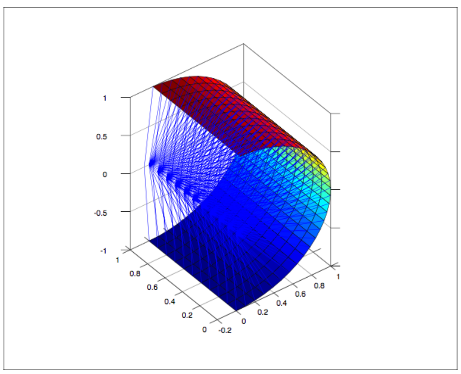
PRÁCTICO 4

Semana 6
Flujo a través de una superficie. Aplicaciones

EN CLASE:

1. Sea S la esfera unidad. Sea X un campo vectorial, y X_r su componente radial. Demostrar que
$$\iint_S X d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} X_r d\phi d\theta$$

2. El campo de velocidades de un fluido está dado por $X = (\sqrt{y}, 0, 0)$ (medido en metros por segundo). La superficie está orientada como en la figura Calcular cuántos metros cúbicos de fluido están atravesando la superficie $x^2 + z^2 = 1$ con $x, y \in [0, 1]$ en cada segundo. Dibujar el campo normal con `surfnorm`. Dibujar la superficie y el campo sobre la misma con `Octave`.



3. Evaluar $\iint_S X d\mathbf{S}$ donde $X(x, y, x) = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$ y S es la superficie borde del sólido cilíndrico $x^2 + y^2 \leq 1$ con $z \in [0, 1]$. Dibujar la superficie y el campo sobre la misma con `Octave`

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. La temperatura en un punto del espacio está dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, con $y \in [0, 2]$. Considerar $k = 1$. Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

2. Calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad si $T(x, y, z) = x$. ¿ Puede interpretar físicamente la respuesta? Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1$ con $z = 0$. Sea $\vec{E}$ el campo eléctrico dado por $\vec{E}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

4. Evaluar $\iint_S (\nabla \wedge X) d\mathbf{S}$ donde S es la superficie $x^2+y^2+3z^2 = 1$ con $z \geq 0$ orientada de modo que la normal apunte hacia arriba y $X(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$. Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

5. Calcular la integral $\iint_S X d\mathbf{S}$ donde S es la toda la superficie borde de la semibola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con $z \geq 0$, y $X(x, y, z) = (x+3y^5, y+10xz, z-xy)$. Se considera la normal exterior. Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

6. Hallar el flujo del campo vectorial $V(x, y, z) = (3y^2, 3x^2y, z^3)$ hacia el exterior de la esfera unidad. Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

7. El campo de velocidades de un fluido está dado por $X = (1, x, z)$ medido en m/s. ¿Cuántos metros cúbicos de fluido están cruzando la superficie $x^2+y^2+z^2 = 1$, con $z \geq 0$ cada segundo? Dibujar la superficie y el campo con `Octave`

8. Sea S la mitad superior del elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, x) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{con } z \geq 0 \right\}$$

   orientada de modo que la normal apunta hacia arriba. Calcular $\iint_S X d\mathbf{S}$ donde $X = (x^3, 0, 0)$ Dibujar la superficie y el campo con `Octave` para el caso $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$.

9. Evaluar $\iint_S \operatorname{rot} X d\mathbf{S}$ donde $X(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ y S es el casquete $x^2+y^2+z^2 = 16$ con $z \geq 0$, orientado con la normal que apunta hacia arriba. Graficar la superficie y sus vectores normales con `surfnorm`. Graficar $\operatorname{rot} X$ sobre la superficie usando `quiver3`.

10. *a*) El campo de velocidades de una lluvia uniforme es $X = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

    b) La lluvia es desviada ahora por un fuerte viento, de modo que cae con un ángulo de 45^o. Se puede modelar como $X(x, y, z) = -(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

    Graficar la superficie y sus vectores normales con `surfnorm`. Graficar ambos campos vectoriales sobre la superficie con `quiver3`.

Semana 5

Teorema de Green

EN CLASE:

1. Hallar el área del círculo usando el teorema de Green

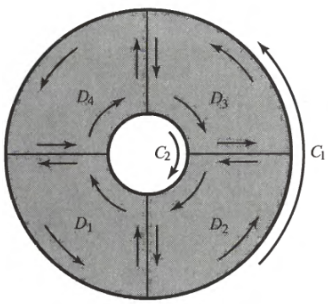
EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C ydx - xdy$ donde C es la frontera del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$, orientada en sentido antihorario.

2. Comprobar el teorema de Green para el círculo de centro $(0,0)$ y radio R para los campos $X(x,y) = (xy^2, -yx^2)$ e $Y(x,y) = (x+y, y)$.

3. Hallar el área limitada por un arco de la cicloide $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ y el eje x, donde $a > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$.

4. Evaluar la integral de línea $\int_C (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ donde C es la circunferencia unidad, y comprobar el teorema de Green para este caso.

5. 

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

Comprobar el teorema de Green para el integrando del ejercicio anterior y la región anular $a \leq x^2 + y^2 \leq b$ orientada como en la figura