Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

PRÁCTICO 3

Semana 4
Superficies paramétricas

EN CLASE:

1. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \sin u \qquad y = \sin v \sin u \qquad z = \cos u$$

con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Identificar la superficie. Graficar con `Octave`.

2. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

   a) una superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (2\cos\theta \sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi)$
   b) un conjunto de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
   c) la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

   Graficar con `Octave` al menos uno de los ejemplos.

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica $\Phi(u, v) = (u^2, u \sin e^v, \frac{1}{3} u \cos e^v)$ en el punto $(13, -2, 1)$. Usando `Octave`, graficar la superficie, el vector normal y el plano tangente en ese punto.

2. Determinar en qué puntos son regulares las siguientes superficies paramétricas:

   a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$
   b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$

   Graficar.

3. Encontrar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \sin v, \qquad y = u \qquad z = \cos v$$

con $v \in [0, 2\pi]$ y $u \in [-1, 3]$. Identificar la superficie. Graficar.

4. Obtener una fórmula para el plano tangente a una superficie de la forma $x = h(y, z)$.

5. Encontrar una parametrización de la superficie $z = 3x^2 + 8xy$ y usarla para hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 0, 3)$. Graficar.

6. Considerar la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por:

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta) \qquad r\in[0,1] \quad \theta\in[0,4\pi]$$

   a) Graficar la superficie
   b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.
   c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).
   d) Graficar el plano tangente en el punto $\Phi(1/2, \pi/2)$

7. Considerar las superficies $\Phi_1(u,v) = (u,v,0)$ y $\Phi_2(u,v) = (u^3, v^3, 0)$
   a) Mostrar que tanto Φ_1 como Φ_2 son parametrizaciones del plano xy
   b) Mostrar que Φ_1 describe una superficie paramétrica regular, mientras que Φ_2 no. Observar que la noción de regularidad depende de la parametrización.

8. a) Hallar una parametrización del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$
   b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esa superficie.
   c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(x_0, y_0, 0)$ donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.
   d) Demostrar que las rectas:

$$r_1)(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5) \qquad r_2)(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$$

   están contenidas tanto en la superficie como en el plano tangente hallado en (c).
   e) Graficar la superficie. Graficar el plano tangente y las rectas r_1 y r_2 en el punto $(5,0,0)$

Semana 5

Área e integral de una función escalar sobre una superficie

EN CLASE:

1. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unidad en dos regiones S_1, dentro del cilindro, y S_2 fuera. Encontrar el cociente $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

2. Evaluar $\iint_S z dS$ donde S es la semiesfera superior de radio a, es decir, el conjunto de puntos (x,y,z) tales que $z = \sqrt{a - x^2 - y^2}$.

3. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto (x,y,z) de S la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a un punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Hallar el área de la superficie parametrizada por $\Phi(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ donde $\theta\in[0,2\pi]$ y $\phi\in[0,\pi]$

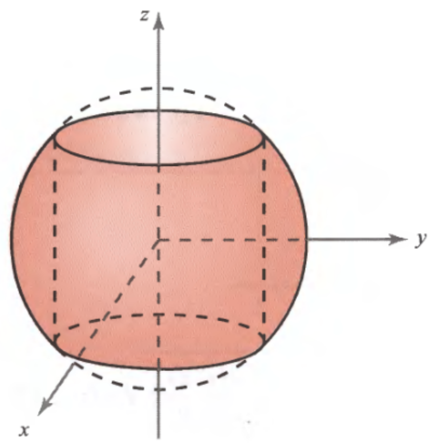
a) ¿ qué pasa si cambiamos el intervalo de ϕ por $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? ¿ y por $\phi \in [0, 2\pi]$?

b) ¿ por qué se obtienen respuestas distintas?

2. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv. Hallar el área de $\Phi(D)$.

3. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$ donde $x > 0$, $y \in [-1, 1]$ y $z \in [0, 1]$. Usar la respuesta para expresar el área de la superficie como una integral. No evaluar.

4. Encontrar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

5. 

Se perfora una bola maciza de radio 2 con un cilindro hueco de radio 1 para formar una junta anular como en la figura. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de esta junta. Usando `surf` y `facealpha`, dibujar la superficie exterior de la junta.

6. a) Calcular el área del trozo del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.

   b) ¿Cuál es el área del trozo de la esfera que está dentro del cono?

7. Calcular $\iint_S z dS$ donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Sea S la esfera de radio R.

   a) Deducir por simetría que

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$$

   b) Usar (a) y algún razonamiento ingenioso para evaluar con muy poco cálculo la integral

$$\iint_S x^2 dS$$

9. Una superficie metálica S tiene la forma de un casquete $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde $x^2 + y^2 \leq R^2$. La densidad de masa está dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcular la masa total de la superficie.

10. Encontrar la coordenada z del centro de gravedad (ver teórico) del casquete inferior esférico de radio r. Deducir por simetría que las coordenadas x e y del centro de gravedad deben ser 0.