Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Cálculo 3.
curso 2015

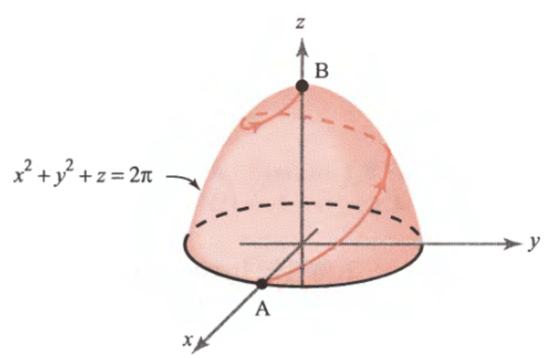
PRÁCTICO 2

Semana 2
Integrales curvilíneas

EN CLASE:

1. Mostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

2. 

Una ciclista sube una montaña a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura. Realiza un giro completo alrededor de la montaña para alcanzar la cima, siendo su pendiente de subida constante.

Durante el viaje ejerce una fuerza dada por el campo vectorial $\mathbf{X}(x, y, z) = (y, x, 1)$. ¿Cuál es el trabajo realizado por la ciclista al viajar de A hasta B? ¿ Por qué es poco realista este modelo?

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Evaluar $\int_\alpha \cos z\, ds$ donde $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Usando `quiver3` y `plot3`, dibujar la curva α, los vectores tangentes α' a lo largo de α.

2. Evaluar $\int_\alpha yzds$ donde $\alpha(t) = (t, 3t, 2t)$ con $t \in [1, 3]$. Usando `quiver3` y `plot3`, dibujar la curva α y los vectores tangentes α' a lo largo de α.

3. Usando el Ejercicio 1 de Clase, calcular la longitud de arco de la curva dada en polares por $r = 1 + \cos\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$.

4. Consideremos un cable semicircular parametrizado por $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ donde $\alpha(t) = (0, a\sin\theta, a\cos\theta)$, con densidad de masa uniforme de 2g por unidad de longitud.

   a) ¿Cuál es la masa total del cable?

b) El **centro de masa** de un objeto unidimensional es:

$$\text{centro de masa} = \frac{\int_\alpha \rho(x,y,z)(x,y,z)ds}{\int_\alpha \rho(x,y,z)}$$

donde $\rho(x,y,z)$ es la densidad de masa del objeto. ¿Cuál es el centro de masa de esta configuración de cable?

5. Encontrar la masa de un cable formado por la intersección de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$, si la densidad está dada por $\rho(x,y,z)=x^2$ gramos por unidad de longitud.

6. Sea $\mathbf{X}(x,y,z)=(x,y,z)$. Evaluar la integral de $\mathbf{X}$ a lo largo de la curva $\alpha(t)=(t^2,3t,2t^3)$ con $t\in[-1,2]$. Usando `quiver3` y `plot3`, dibujar la curva α, los vectores tangentes α' y el campo vectorial X a lo largo de α.

7. Evaluar la integral de línea $\int_\alpha yzdx + xzdy + xydz$ donde α es la curva diferenciable por partes formada por los segmentos que unen $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$ y éste con $(0,0,1)$.

8. Sea α una curva paramétrica C^1.

   a) Demostrar que si $\mathbf{X}(\alpha(t))$ es perpendicular a $\alpha'(t)$ para todo t entonces

   $$\int_\alpha \mathbf{X}d\alpha = 0$$

   b) Demostrar que si $\mathbf{X}(\alpha(t))$ es paralelo a $\alpha'(t)$ para todo t, es decir $\mathbf{X}(\alpha(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$ con $\lambda(t)>0$, entonces

   $$\int_\alpha \mathbf{X}d\alpha = \int_\alpha \|\mathbf{X}\|ds$$

9. Sea V el volumen, P la presión y T la temperatura de un determinado gas. Consideremos una "curva termodinámica" $\alpha(t)=(V(t),T(t),P(t))$.

   - el **calor ganado** se define como

     $$\int_\alpha \Lambda dV + KdT$$

     donde Λ y K son funciones que dependen de (V,T,P).

   - el **trabajo realizado** se define como

     $$\int_\alpha PdV$$

   Para un gas de van der Waals se tiene que

   $$P(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \qquad J\Lambda = \frac{RT}{V-b} \qquad K = \text{constante}$$

   donde R, a, b y J son cantidades constantes conocidas. Inicialmente el gas está a una temperatura T_0 y tiene un volumen V_0, ambos conocidos.

Un **proceso adiabático** es una evolución termodinámica $\alpha(t) = (V(t), T(t), P(t))$ que cumple:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dV}{dt}} = -\frac{\Lambda}{K}$$

Si el gas de van der Waals se somete a un proceso adiabático en donde el volumen inicial V_0 crece hasta duplicarse ($2V_0$), calcular

a) el calor ganado

b) el trabajo realizado

c) el volumen, la temperatura y la presión finales

Semana 3

Rotor, campos conservativos, equivalencia entre campos irrotacionales y conservativos

---

EN CLASE:

1. Sea el campo de fuerzas gravitatorio, definido para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$:

$$\mathbf{X}(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se mueve desde (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) depende sólo de los radios $R_1 = \|(x_1, y_1, z_1)\|$ y $R_2 = \|(x_2, y_2, z_2)\|$.

2. Demostrar que dos potenciales escalares de un mismo campo vectorial difieren en una constante.

3. Sea $\mathbf{X}(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar un potencial escalar para $\mathbf{X}$. Usando `quiver3`, dibujar el campo X en el dominio $[-1, 1]\times[-1, 1]\times[-1, 1]$.

EJERCICIOS DOMICILIARIOS:

1. Demostrar que si f función y $\mathbf{X}$ campo diferenciables, entonces:

$$\nabla \wedge (f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f\nabla \wedge \mathbf{X}$$

es decir, $\mathrm{rot}(f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f\,\mathrm{rot}(\mathbf{X})$

2. Calcular el rotor del campo

$$\mathbf{X}(x, y, z) = \frac{(yz, -xz, xy)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Usando `quiver3` dibujar el campo X en el dominio $[-1, 1]^3$.

3. Demostrar que el campo $\mathbf{X}(x, y) = (y \cos x, x \sin y)$ no es de gradientes. Usando `quiver` dibujar el campo X en el dominio $[-1, 1]$.

4. Sea $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que:

a)
$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{(x,y,z)}{r^3}$$

b)
$$\nabla \wedge (x,y,z) = \mathrm{rot}(x,y,z) = (0,0,0)$$

5. ¿ Son siempre perpendiculares los campos $\mathbf{X}$ y rot$\mathbf{X}$?

6. Supongamos que una partícula sale despedida de la superficie $x^2+y^2-z^2=-1$ desde el punto $(1,1,\sqrt{3})$ según la normal a la superficie, dirigida hacia el plano xy, en el instante $t=0$ con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo y dónde cruzará el plano xy? Usando `surf, quiver3, plot3`, dibujar la superficie, el vector normal a la superficie, y el punto en donde se cruza al plano xy.

7. Determinar cuál de los siguientes campos es un campo de gradientes, y en los casos apropiados, hallar un potencial escalar

   a) $\mathbf{X}(x,y) = (x,y)$

   b) $\mathbf{X}(x,y) = (xy,xy)$

   c) $\mathbf{X}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$

8. Demostrar que $\int_{\mathcal{C}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$ donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unidad.

   a) Concluir que $\mathbf{X}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ no es conservativo.

   b) Mostrar que, sin embargo rot$(\mathbf{X}) \equiv (0,0)$ en su dominio. ¿Qué es lo que está ocurriendo? ¿ No entra en contradicción con el Teorema de equivalencia de campos irrotacionales y conservativos?

9. La masa de la Tierra es aproximadamente $6\times10^{27}g$, y la masa del Sol es 330.000 mayor. La constante gravitatoria es $6,7\times10^{-8}\mathrm{cm}^3/s^2.g$. La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente $1,5\times10^{12}$cm. Calcular aproximadamente el trabajo necesario para aumentar la distancia de la Tierra al Sol en 1cm.

10. Sea $\mathbf{X}(x,y,z) = (-y,x,0)$. Demostrar que $\mathbf{X}$ no es irrotacional. Supongamos que $\mathbf{X}$ representa el campo de velocidades de un fluido. Demostrar que si colocamos un corcho en ese fluido, éste girará en un plano z =constante, en una trayectoria circular alrededor del eje z. ¿En qué sentido girará el corcho? Usando `quiver3`, dibujar el campo de velocidades en el dominio $[-1,1]$

11. Demostrar que el campo $\mathbf{X}(x,y) = (xy^2+3x^2y, (x+y)x^2)$ es consevativo. Calcular el trabajo que realiza la fuerza a lo largo de la poligonal que une los puntos $(1,1)$ con $(0,2)$ y éste con $(3,0)$. Dibujar, usando `quiver` el campo $\mathbf{X}$ en el dominio $[0,3]\times[0,2]$. Usando `plot` dibujar la poligonal.

    En una pantalla aparte, usado `plot` y `quiver`, dibujar el campo $\mathbf{X}$ a lo largo de la poligonal.